RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 17 gennaio 1926.

Presidenza del Socio anziano B. STRINGHER.

Il PRESIDENTE, aperta la seduta pronuncia le seguenti parole:

Chiarissimi Colleghi,

Il cordoglio stringe ancora i cuori di tutto il popolo italiano, per la morte della prima Regina d'Italia. Ella non è più, e negli animi commossi si sente ancora una sorpresa dolorosa.

Ella era, per tutti, la beltà, la bontà e la gentilezza non periture, che nel nome di un fiore si riassumevano, quasi immagine della Patria.

Nata dall'antico e forte ceppo di Savoia, di questo ereditò le virtù regali. Forse, come alcuno disse, dal nonno materno, Giovanni Re di Sassonia, che venerò Dante e ne tradusse il divino poema, trasse l'amore alle lettere; ma in questo e nella Sua fine sensibilità artistica Ella fu segnatamente italiana.

Le tradizioni delle principesse delle antiche corti d'Italia, inspiratrici e protettrici di poeti, di artisti e di dotti rivissero in Lei, che di vivida mente e di vasta cultura, tenne in onore ogni uomo eminente per intelletto e per dottrina, come sanno coloro che ebbero la fortuna di partecipare alle Sue mirabili conversazioni.

Sovrana nella Reggia, ove l'ingegno e il sapere avevano per Lei benigna accoglienza, fu al popolo, come scrisse Giosuè Carducci, cortese della soavità di colomba e dei sorrisi più rosei.

E il popolo molto l'amò, e l'amore diventò più intenso, quasi più intimo, quando la vide, Principessa e Regina, affettuosa e munifica soccorritrice; e conobbe di Lei la parola che conforta, la pietà che non umilia, sollecita per ogni sventura, per ogni miseria, per ogni dolore.

Si sentì presso di Lei quando la gioia allietò la Sua casa, e quando il dolore la conturbò; fu con Lei quando mani sacrileghe attentarono alla vita dell'amato Sovrano, e quando Egli giacque, e fu compiuto quello che Ella giustamente disse il più gran delitto del secolo.

Come sposa e come madre, Margherita di Savoia fu squisitamente donna; ma in Lei la femminilità non soverchiò la regalità, fu invece più alta e più nobile. Del Re Buono fu la moglie affettuosa, lieta di ogni Sua gioia, sì da far pensare che dal sorriso di Lui traesse quello Suo dolcissimo.

Pur troppo dovè trepidare per Lui fino all'ultima terribile prova: allora fu donna, pianse tutte le Sue lacrime. Ma ben presto ritornò in Lei la Regina, che il dolore della donna sublimò in una commossa preghiera, atto schietto di fede.

Del Figlio curò l'educazione; lo volle uomo e principe. Fu per Lui la Madre che insegna la gentilezza dell'animo; fu la Regina che insegna le virtù eroiche al Principe, che discende da una antica gloriosa Casa, per regnare.

Nella cotidiana politica Margherita di Savoia non ebbe parte, o, meglio, ne ebbe una nobilissima e palese poichè, non volle alla Sua Corte politicanti; ma con la bontà, con la carità, con il fascino che emanava da Lei, si adoperò a rendere più amata la Monarchia, ad elevarne il prestigio; e avvicinò la Reggia alla Nazione, dando incoraggiamento e ausilio a ogni opera buona, a ogni opera utile; seguendo e affermando ogni alta manifestazione nazionale.

Nata in una Casa le cui Donne ebbero nome di Sante, fu profondamente devota e pia, ed Ella seppe compiere opera sottile e delicata, quando meno agevoli erano i rapporti dello Stato con la Chiesa, e molti vedevano nello Stato Italiano quasi un nemico della Religione. Ancora Principessa, Ella, per la Sua fede sinceramente e umilmente professata, seppe vincere ostilità, conquistare amici alla Monarchia, e fu grazie alla Sua fede più vicina al Suo popolo credente.

L'anima nobilissima di Margherita di Savoia ebbe sul trono le più grandi gioie, i più grandi dolori. Ella che fu sulla terra

quasi un messo d'amore, ed ebbe l'affetto del Suo Re, del Figlio Suo, dei Suoi congiunti, di quanti l'avvicinarono, fu colpita dal più atroce dolore: vide il Suo sposo « cosparso del suo sangue vermiglio sgorgato da tre ferite », inferte, purtroppo, da mano italiana.

Ella amò immensamente la Patria, ed ebbe piena fede nel popolo italiano, anche quando le violenze di plebi eccitate facevan dubitare i timidi delle sorti d'Italia.

Delle fortune della Patria Ella fu tenace assertrice alla vigilia della grande guerra, di cui comprese la fatale necessità con quel giudizio che le veniva dalla conoscenza dei maggiori problemi politici e morali del nostro tempo in Italia e fuori.

Il suo animo, anche questa volta, si manifestò in una opera di carità. Ella volle che nella Sua Reggia vi fosse uno spedale per gli ufficiali e uno per i soldati che ritornavano dal campo, offesi nella persona. Nè mai abbandonò i Suoi feriti: li assistette nei giorni di dolore e nella convalescenza; rincuorò coloro che guariti tornavano fervidamente alla mischia; e confortò gli altri, costretti dal male a rimanere lontani dal nemico in battaglia.

Per le giornate gloriose di Vittorio Veneto Ella fu esultante, ma non sorpresa: la fede della Sua grande anima non Le aveva mentito.

Ora Ella è passata: è passata, mentre nella Villa di Bordighera giungevano a fasci, da ogni parte d'Italia, fiori e fiori: offerta augurale di vita, al compiersi del Suo settantaquattresimo anno.

È passata, ma ne sarà imperituro il ricordo, in queste aule, dove Ella accompagnava il suo Re nelle solennità annuali, che rammentavano e ancora a noi rammentano la sapiente munificenza di Lui.

Con animo commosso, rivolgo l'estremo saluto dell'Accademia alla Regina che dorme nel Pantheon.

Il Presidente propone che, in segno di lutto, sia tolta la seduta; e l'Assemblea unanime approva.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Idromeccanica. — *Azioni meccaniche di una corrente piana che investe due profili circolari convenientemente distanti tra di loro.* Nota del Corrisp. UMBERTO CISOTTI.

Siano γ_1 e γ_2 due profili circolari, complanari, fissi i cui centri sieno i punti di affisse $z_1 = x_1 + i\,y_1$ e $z_2 = x_2 + i\,y_2$ e di raggi r_1 e r_2; risulta

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

la distanza dei centri.

Ipotesi a). Supponiamo che sia ρ sufficientemente grande rispetto al maggiore dei due raggi r_1 e r_2 per cui dei rapporti $\frac{r_1}{\rho}$ e $\frac{r_2}{\rho}$ si possano trascurare le potenze superiori alla prima.

La parte di piano esterna a γ_1 e γ_2 sia occupata da una massa fluida incomprimibile, di densità unitaria, in moto permanente irrotazionale e regolare.

Mi propongo di esporre una soluzione che corrisponde nell'ipotesi a), al problema di moto regolare di una corrente traslatoria che investe i due profili γ_1 e γ_2 avviluppandoli nel tempo stesso, ciascuno, di una corrente circolatoria. Le rispettive circolazioni C_1 e C_2 risultano legate alla portata q della corrente che scorre tra γ_2 e γ_1 della relazione seguente:

$$(I) \qquad 2\pi q = 2\pi\rho V \operatorname{sen}\theta + C_1 \log\frac{r_1}{\rho} - C_2 \log\frac{r_2}{\rho},$$

in cui: V designa il valore della velocità assintotica (a monte, a valle e lateralmente dei profili) della corrente e θ l'angolo che la retta dei centri $z_1 \rightarrow z_2$ forma colla direzione assintotica della corrente. Se questa coincide, in direzione e verso, coll'asse x, chiamando $R_x^{(1)}$ e $R_y^{(1)}$ le componenti cartesiane (v. fig. 1) della risultante $\mathbf{R}^{(1)}$ delle pressioni dinamiche sopportate

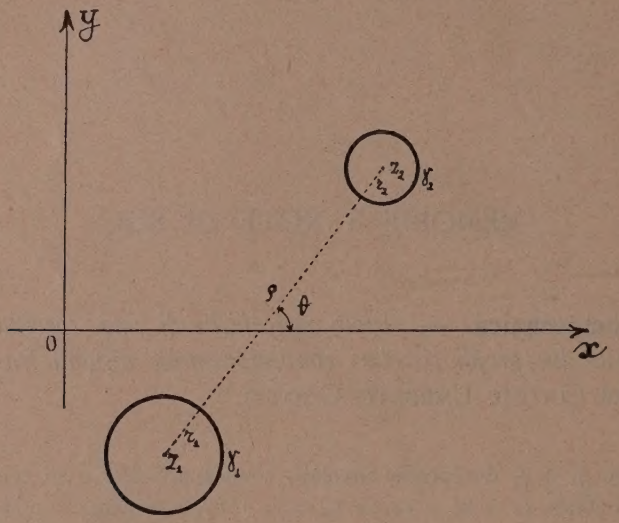

Fig. 1.

dal profilo γ_1 e $R_x^{(2)}$, $R_y^{(2)}$ le analoghe componenti della risultante $\mathbf{R}^{(2)}$ delle pressioni relative al profilo γ_2 si ha:

$$(II)\quad \begin{cases} R_x^{(1)} = -\dfrac{C_1 C_2}{2\pi\rho}\cos\theta\,, \\ R_y^{(1)} = -\dfrac{C_1 C_2}{2\pi\rho}\operatorname{sen}\theta - V C_1\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} R_x^{(2)} = \dfrac{C_1 C_2}{2\pi\rho}\cos\theta\,, \\ R_y^{(2)} = \dfrac{C_1 C_2}{2\pi\rho}\operatorname{sen}\theta - V C_2\,. \end{cases}$$

Scende da queste che $\mathbf{R}^{(1)}$ risulta dalla composizione: di un vettore normale alla direzione assintotica della corrente di un modulo $V\,|\,C_1\,|$ e di un vettore parallelo alla retta dei centri dei profili γ_1, γ_2 e di modulo $\dfrac{|\,C_1 C_2\,|}{2\pi\rho}$; mentre $\mathbf{R}^{(2)}$ è somma di un vettore pure normale alla direzione assintotica della corrente e di modulo $V\,|\,C_2\,|$ e di un vettore parallelo alla retta dei centri e opposto all'analogo componente di $\mathbf{R}^{(1)}$; tanto in $\mathbf{R}^{(1)}$ che in $\mathbf{R}^{(2)}$ i versi dei vettori componenti secondo la direzione normale alla corrente e secondo la retta dei centri dipendono ovviamente dal segno delle circolazioni C_1 e C_2, a norma delle formule (II).

Il momento $M^{(1)}$ (normale al piano del moto e sinistrorso) delle pressioni su γ_1 rispetto al suo centro e quello $M^{(2)}$ relativo al profilo γ_2 e rispetto al suo centro, risultano definiti dalle formule seguenti:

$$\text{(III)} \qquad M^{(1)} = \frac{C_2 r_1^2 V}{\rho} \cos\theta\,, \quad M^{(2)} = -\frac{C_1 r_2^2 V}{\rho} \cos\theta\,.$$

Ha particolare interesse il caso in cui i due profili γ_1 e γ_2 hanno lo stesso raggio e sono simmetricamente disposti rispetto all'asse x (fig. 2).

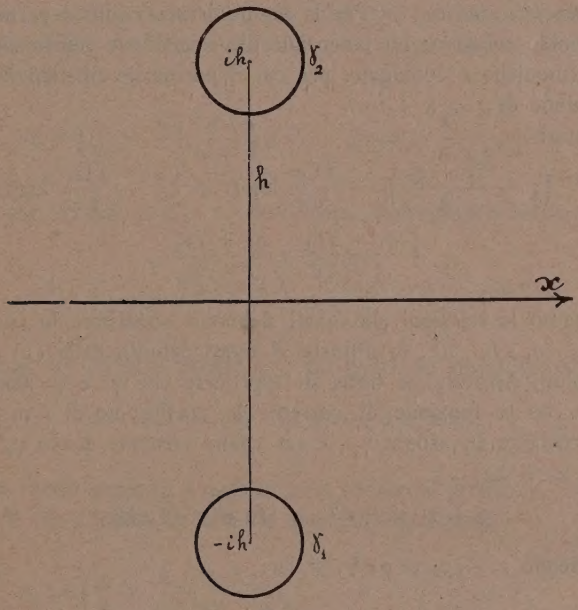

Fig. 2.

Avendosi allora $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $C_2 = -C_1 = C$, ponendo $\rho = 2h$ le (II) e (III) divengono:

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} R_x^{(1)} = 0\,, \\ R_y^{(1)} = \dfrac{C^2}{4\pi h} + VC\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} R_x^{(2)} = 0\,, \\ R_y^{(2)} = -\dfrac{C^2}{4\pi h} - VC\,; \end{cases}$$

$$\text{(III')} \qquad M^{(1)} = 0 \quad , \quad M^{(2)} = 0\,.$$

Come si vede le azioni dinamiche della massa fluida sui profili γ_1 e γ_2 si riducono a due forze opposte $\mathbf{R}^{(1)}$ e $\mathbf{R}^{(2)}$, normali alla direzione della corrente.

Se si considera il solo semipiano $y \geqq c$, di ordinate non negative, il caso particolare, ora messo in rilievo, risolve nell'ipotesi *a*), il problema del moto di una corrente traslocircolatoria che investe un profilo circolare in presenza di una parete rigida rettilinea, problema che analiticamente equivale, com'è noto, a quello della traslazione uniforme del profilo circolare γ_1 con velocità costante di valore V parallela alla parete fissa, essendo h la distanza del centro di γ_1 della parete, quando il profilo γ_1 è avviluppato da una corrente circolatoria.

1. *Potenziale cinetico.* — Per la natura irrotazionale e permanente del moto del fluido esistono: un potenziale di velocità φ e una funzione di corrente ψ, armoniche e coniugate, per cui il potenziale cinetico $f = \varphi + i\psi$ risulta funzione di $z = x + iy$.

Poniamo:

$$(1)\quad f = V\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) - \frac{iC_1}{2\pi}\log(z - z_1) - \frac{iC_2}{2\pi}\log(z - z_2) + \\ + \frac{a_1 + ib_1}{z - z_1} + \frac{a_2 + ib_2}{z - z_2}.$$

Cerchiamo le relazioni alle quali debbono soddisfare le costanti reali V, C_1, C_2, a_1, b_1, a_2, b_2 affinchè il moto definito dalla (1) soddisfi ai requisiti voluti. Anzitutto si tratta di esprimere che γ_1 e γ_2 sono linee di flusso, cioè che la funzione di corrente ψ, coefficiente di i in f, assume un valore costante ψ_1, sopra γ_1, e un valore costante ψ_2 su γ_2.

Sopra γ_1 si ha:

$$z - z_1 = r_1 e^{i\sigma} \quad , \quad (0 \leqq \sigma \leqq 2\pi),$$

per cui, essendo $z_2 - z_1 = \rho e^{i\theta}$, si ha:

$$z - z_2 = \rho e^{i(\pi + \theta)}\left\{1 - \frac{r_1}{\rho}e^{i(\sigma - \theta)}\right\}.$$

Per l'ipotesi *a*) si ha:

$$\log(z - z_2) = \log\rho + i(\pi + \theta) - \frac{r_1}{\rho}e^{i(\sigma - \theta)},$$

$$\frac{1}{z - z_2} = \frac{-e^{-i\theta}}{\rho}\left\{1 + \frac{r_1}{\rho}e^{i(\sigma - \theta)}\right\},$$

per cui, nei punti di γ_1 risulta essere:

$$f = V\left\{r_1 e^{i\sigma} - \frac{1}{2}\rho e^{i\theta}\right\} - \frac{iC_1}{2\pi}\left\{\log r_1 + i\sigma\right\} - \frac{iC_2}{2\pi}\left\{\log\rho + i(\theta + \pi) - \right.$$

$$\left. - \frac{r_1}{\rho}e^{i(\sigma - \theta)}\right\} + \frac{a_1 + ib_1}{r_1}e^{-i\sigma} - \frac{a_2 + ib_2}{\rho}e^{-i\theta}\left\{1 + \frac{r_1}{\rho}e^{i(\sigma - \theta)}\right\}.$$

Eguagliando le parti immaginarie dei due membri, e rilevando che i termini contenenti a_2 e b_2 sono di ordine superiore, si ottiene in definitiva:

$$\psi_1 = -\frac{1}{2} V \rho \operatorname{sen}\theta - \frac{C_1}{2\pi} \log r_1 - \frac{C_2}{2\pi} \log \rho +$$

$$+ \left\{ V r_1^2 + \frac{C_2 r_1^2}{2\pi\rho} \operatorname{sen}\theta - a_1 \right\} \operatorname{sen}\sigma + \left\{ \frac{C_2 r_1^2}{2\pi\rho} \cos\theta + b_1 \right\} \cos\sigma .$$

Il primo membro è costante, ciò esige che nel secondo membro devono essere nulli i coefficienti di $\operatorname{sen}\sigma$ e di $\cos\sigma$. Questo porta alle seguenti relazioni:

$$(2) \qquad a_1 = \left(V + \frac{C_2 \operatorname{sen}\theta}{2\pi\rho} \right) r_1^2 \qquad b_1 = -\frac{C_2 r_1^2}{2\pi\rho} \cos\theta ,$$

che definiscono le costanti a_1 e b_1. Per queste, la precedente relazione diviene:

$$(3) \qquad \psi_1 = -\frac{1}{2} V \rho \operatorname{sen}\theta - \frac{C_1}{2\pi} \log r_1 - \frac{C_2}{2\pi} \log \rho .$$

Passando ora all'altro profilo γ_2, sui punti del quale si ha:

$$\zeta - \zeta_2 = r_2 e^{i\sigma} \quad , \quad (0 \leq \sigma \leq 2\pi) ,$$

operando in modo analogo a quanto si è riferito al profilo γ_1, si perviene ad assegnare alle costanti a_2 e b_2 le seguenti espressioni:

$$(4) \qquad a_2 = \left(V - \frac{C_1 \operatorname{sen}\theta}{2\pi\rho} \right) r_2^2 \quad , \quad b_2 = \frac{C_1 r_2^2}{2\pi\rho} \cos\theta ,$$

e inoltre si ottiene:

$$(5) \qquad \psi_2 = \frac{1}{2} V \rho \operatorname{sen}\theta - \frac{C_1}{2\pi} \log \rho - \frac{C_2}{2\pi} \log r_2 .$$

Chiamando q la portata della corrente che fluisce tra γ_1 e γ_2 si ha $q = \psi_2 - \psi_1$, che per le (3) e (5) dà luogo alla formula (I).

2. *Velocità.* — Se u, v sono le componenti cartesiane della velocità, questa risulta notoriamente definita dalla relazione complessa

$$w = u - iv = \frac{df}{d\zeta} ,$$

ovvero, per la (1),

$$(6) \qquad w = V - \frac{i}{2\pi}\left\{\frac{C_1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{C_2}{\zeta - \zeta_2}\right\} - \frac{a_1 + i b_1}{(\zeta - \zeta_1)^2} - \frac{a_2 + i b_2}{(\zeta - \zeta_2)^2}.$$

Risulta da questa che per ζ tendente comunque all'∞ è

$$\lim_{\zeta \to \infty} w = V,$$

il che mostra che assintoticamente, sia a monte che a valle che lateralmente degli ostacoli γ_1, γ_2, la corrente fluisce parallelamente all'asse reale con velocità costante V. In tutti i punti del piano, esterni a γ_1 e γ_2 la velocità w si mantiene regolare.

3. *Circolazioni.* — La circolazione relativa a una linea chiusa qualsiasi che circonda il profilo γ_1 eguaglia quella relativa allo stesso profilo γ_1 ed è espressa [1] dall'integrale:

$$\int_{\gamma_1} w\, d\zeta.$$

Integrando la (6) lungo γ_1, in modo da lasciare a sinistra l'area circolare racchiusa da γ_1, si ottiene:

$$\int_{\gamma_1} w\, d\zeta = C_1.$$

Analogamente:

$$\int_{\gamma_2} w\, d\zeta = C_2.$$

Queste relazioni mettono in evidenza il significato di circolazioni delle costanti C_1 C_2 e ne precisa il verso.

4. *Azioni dinamiche sopra* γ_1. — La risultante delle pressioni dinamiche esercitate dal fluido sul profilo γ_1 risulta definita, mediante le sue componenti cartesiane $R_x^{(1)}$, $R_y^{(1)}$, della formula di Blasius [2].

$$R_y^{(1)} + i\, R_x^{(1)} = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} w^2\, d\zeta,$$

(1) Cfr. la mia Nota *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro e una parete piana indefinita.* Questi «Rend.», vol. I, serie 6ª (1925), p. 497.

(2) Loc. cit., p. 498.

l'integrazione lungo γ_1 intendendosi sempre sinistrorsa; per il momento $M^{(1)}$ rispetto al centro ζ_1 di γ_1 si ha invece (1):

$$M^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{ parte reale di } \int_{\gamma_1} w^2 (\zeta - \zeta_1)\, d\zeta .$$

Tenendo conto della (6) e dell'ipotesi *a*) si ottiene:

$$\int_{\gamma_1} w^2\, d\zeta = 2\,V\,C_1 + i\,\frac{C_1 C_2}{\pi \rho}\, e^{-i\theta},$$

$$\int_{\gamma_1} w^2 (\zeta - \zeta_1)\, d\zeta = -\frac{i\,C_1^2}{2\pi} - 4\pi i\,V\,(a_1 + i\,b_1).$$

Per questo, le precedenti formule di *Blasius* forniscono:

$$R_y^{(1)} + i\,R_x^{(1)} = -\,V\,C_1 - i\,\frac{C_1 C_2}{2\pi\rho}\, e^{-i\theta},$$

$$M^{(1)} = -\,2\pi\,V\,b_1$$

dalle quali scendono: il primo gruppo delle (II) e, tenuto conto della seconda delle (2), la prima delle (III).

5. *Azioni dinamiche sopra* γ_2. — Analogamente per le componenti della risultante delle pressioni sopra γ_2 e per il momento delle stesse rispetto al punto $\zeta = \zeta_2$, si hanno le formule:

$$R_y^{(2)} + i\,R_x^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} w^2\, d\zeta, \quad M^{(2)} = -\frac{1}{2} \text{ parte reale di } \int_{\gamma_2} w^2 (\zeta - \zeta_2)\, d\zeta.$$

Avendosi, per la (6),

$$\int_{\gamma_2} w^2\, d\zeta = 2\,V\,C_2 - i\,\frac{C_1 C_2}{\pi \rho}\, e^{-i\theta},$$

$$\int_{\gamma_2} w^2 (\zeta - \zeta_2)\, d\zeta = -\,i\,\frac{C_2^2}{2\pi} - 4\pi i\,V\,(a_2 + i\,b_2),$$

(1) Loc. cit., p. 498, formula (13). Va rilevato che nella citata formula (13) il momento è espresso rispetto al punto $\zeta = 0$, mentre ora il momento si riferisce al punto $\zeta = \zeta_1$, da ciò la sostituzione del fattore $\zeta - \zeta_1$ a ζ sotto il segno integrale.

Colgo l'occasione per rilevare che tanto a p. 498 della Nota citata, quanto a p. 572 della Nota *Effetto dinamico di una corrente che circola attorno un cilindro in un tunnel*, l' $\int w^2 \zeta\, d\zeta$ va eguagliato a zero. Debbo questo rilievo a cortese comunicazione del collega prof. Boggio. La correzione non porta alcuna variazione nei risultati contenuti nelle Note citate.

le precedenti formule forniscono:

$$R_y^{(2)} + i R_x^{(2)} = - V C_2 + \frac{i C_1 C_2}{2 \pi \rho} e^{-i\theta},$$

$$M^{(2)} = - 2 \pi V b_2,$$

dalle quali si deducono: il secondo gruppo delle (II) e, per la seconda delle (4), la seconda delle (III).

6. *Caso particolare di simmetria.* — Se i due profili γ_1 e γ_2 hanno lo stesso raggio e sono simmetricamente disposti rispetto all'asse x (fig. 2) si ha la soluzione simmetrica che si ricava dalle formule stabilite, ponendo: $C_2 = - C_1 = C$, $\theta = 0$, $\rho = 2h$, $r_1 = r_2 = r$, $\zeta_1 = - ih$, $\zeta_2 = ih$, con che h rappresenta la distanza comune dei centri dei due profili dall'asse x. In tal caso le formule (II) e (III) divengono le (II') e (III'), e le (2) e (4) divengono:

$$a_1 = a_2 = \left(V + \frac{C}{4 \pi h} \right) r^2 \ldots , \qquad b_1 = b_2 = 0 .$$

Pertanto la (1) fornisce pel potenziale cinetico la seguente espressione:

$$f = V \zeta + \frac{i C}{2 \pi} \log \frac{\zeta + ih}{\zeta - ih} + 2 \left(V + \frac{C}{4 \pi h} \right) \frac{r^2 \zeta}{\zeta^2 + h^2}$$

Infine la (I) diviene:

$$q = 2 h V - \frac{C}{\pi} \log \frac{r}{2h} .$$

Geologia. — *Le scoperte di foraminifere priaboniane nelle «arenarie di Taveyannaz» confermanti l'età eocenica delle «arenarie di Annot», dimostrata nel 1916.* Nota del Socio Corrispondente ing. Secondo Franchi.

Io avevo licenziato le ultime bozze della Nota presentata nella seduta precedente, in cui ho esposta, fra l'altro, la felice intesa, con l'accettazione del mio ordine di idee da parte dei colleghi Termier e Kilian, sulla questione della età dei *grès d'Annot*, quando mi pervenne, mandatami con grave ritardo, una interessante Nota di L. Moret, del Laboratorio di Geologia della Università di Grenoble, presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi nel gennaio 1924, annunziante la scoperta di Ortofragmine associate con Nummuliti del gruppo delle striate, nelle arenarie verdi dei pressi

di Praz, nel massiccio della *Croix des Sept-Frères,* nell'alta Savoia [1]. Questo ritrovamento in arenarie che sono la evidente prosecuzione di quelle del massiccio *des Diablérets,* costituisce una valida conferma del significato che M. Lugeon aveva attribuito alle stesse foraminifere, da lui precedentemente scoperte in questo ultimo massiccio [2], cioè: la sicura età eocenica della potente e notissima formazione dei *grès de Taveyannaz,* sulla quale, causa la mancanza di fossili, erano finora molto discordi i pareri dei geologi [3], basati in parte sopra la erronea supposizione della corrispondenza di esse coll'Oligocene della zona esterna di Déserts, allo stesso modo in cui sono stati equiparati i *grès d'Annot* con l'Oligocene della zona esterna di Castellane.

Dopo di aver discusso se le arenarie, includenti le suddette foraminifere, siano carreggiate o siano invece in posto, alla sommità di una serie stratigrafica continua, l'A. si attiene a questa ultima ipotesi, e ne trae le conseguenze, che sono principalmente: 1° il necessario invecchiamento delle eruzioni vulcaniche che fornirono molti elementi detritici alle arenarie, pei quali esse assunsero caratteri litologici distintissimi, per la cui origine l'A. accetta la più ragionevole ipotesi di Niggli, della provenienza dalla « zona del Canavese », anzichè quella di Duparc e Ritter sulla provenienza dalle regioni vulcaniche del Vicentino; 2° un grande restringimento della zona Oligocenica dell'orlo esterno della geosinclinale alpina. Alla fine della sua Nota l'A. dice testualmente « l'âge des grès mouchetés du Champsaur et des grès d'Annot qui semblent bien être sur le même horizont stratigraphique que les grès de Taveyannaz, et qui couronnent également des talus de marnes et de schistes à faune priabonienne, se trouve donc remise en question ».

Io mi rallegro col sig. Moret pel rinvenimento di fossili da lui fatto, a poca distanza di luogo e di tempo da quello fatto da M. Lugeon, e mi

(1) L. Moret, *Sur la découverte d'orthophragmine dans les grès de Taveyannaz du Massif de Platé (Haute Savoie) et sur ses conséquence,* « C. R. Acc. d. sc. Paris », 21 janvier 1924.

(2) M. Lugeon, *Sur l'âge du grès de Taveyannaz,* « Sonderabdruck aus Eglogæ Geologicæ Elvetiæ », vol. XVIII, n. 2, 1923.

Una farmula analoga a quelle scoperte da M. Lugeon e da L. Moret, con piccolissime e rare Nummuliti striate e piccole e numerose Orthofragmine lenticolari e piatte (*Discocyclina*), riconobbe Checchia-Rispoli in arenarie della mia « zona ad Helminthoida » (Priaboniano superiore) dei pressi di Bordighera. Però bisogna ricordare che il Checchia ed altri autori ritengono che le suddette forme abbiano sopravissuto all'Eocene, come del pari le *Lepidocyclina* siano apparse fin dalla base dell'Eocene medio.

(3) Ad es., mentre Arnold Heim nella sua opera *Die Nummuliten und Flischbildungen der Schweizer Alpen,* (Abhand. der Schweiz. paleontol. Gesell. », vol. 35°, 1908) considerava le arenarie di Taveyannaz come luteziane, e R. Staub le riteneva pure eoceniche, nella grande e recente opera *Geologie der Schweiz* di Albert Heim, quelle arenarie sono ancora riferite all'Oligocene, con un capitolo dedicato a questo terreno, nel quale figura un grande profilo schematico di Arnold Heim stesso.

associo volentieri a qualcuna delle deduzioni che egli ne trasse, e particolarmente a quella in cui, seguendo il Niggli, egli ammise la provenienza dalle Alpi Piemontesi degli elementi vulcanici, esistenti nelle arenarie di Taveyannaz [1]; ma mi duole di dovere, in pari tempo lamentare che egli mostri, con l'ultima sua deduzione, di ignorare completamente: 1° che la questione dell'età dei *grès d'Annot* è stata risolta da parecchi anni [2]; 2° che, con un procedimento inverso di quello da lui tenuto, dopo la dimostrazione dell'età eocenica di quella formazione, io ne dedussi la probabile eguale età dei *grès mouchetés*, dei *grès de Taveyannaz* e dei *grès de Altdorf*. Un breve cenno storico non sarà quindi superfluo.

Già nella Carta geologica al 400.000 delle Alpi Occidentali, edita nel 1908 dal R. Ufficio geologico, le aree che, sotto la notazione *grès d'Annot* figuravano nelle carte geologiche francesi all'80.000 e nella Carta geologica della Francia al 1.000.000, sono state da me poste nell'Eocene, in piena armonia con la Carta geologica del Ventimigliese al 100.000, pubblicata nel 1894 [3]. Ciò vuol dire che la questione della età di questi *grès* io me l'ero posta, e l'avevo, per conto mio, decisamente risolta, prima del 1908.

Ma, naturalmente le semplici indicazioni delle carte geologiche non potevano più bastare dopo che J. Boussac, in seguito a numerose e non affrettate escursioni al di qua del confine, dopo interessanti e numerose osservazioni stratigrafiche, trascurando però completamente le nostre carte e i nostri lavori, non esitò, a porre nell'Oligocene, comparandole alle arenarie di Annot, tutte le arenarie di due orizzonti ben distinti e da me cartograficamente delimitati, dell'Eocene [4]. Perciò, anche in considerazione

(1) Niggli, « Bull. de la Soc. Suisse de Minéralogie et de Pétrographie », t. II, 1922. Questa ipotesi, se confermata con osservazioni petrografiche positive, ci permetterebbe di datare un fenomeno della massima importanza, quale è quello della « frattura alpino-dinarica », lungo la quale esiste il noto ed interessantissimo dicco melafirico-porfiritico, esteso, quasi rettilinearmente, per circa 25 chilometri.

(2) La intesa verbale su questa questione coi colleghi Termier e Kilian è avvenuta solo nello scorso luglio, ma l'intesa epistolare con W. Kilian, che era il più interessato della questione, data dal 1916. Difatti nessuna opposizione è stata formulata, da allora in poi, alle mie argomentazioni, dai geologi francesi che avevano interesse di farlo. Il Signor F. Blanchet mi informa gentilmente che E. Haug ha scritto di recente una *contribution à une synthèse stratigraphique des Alpes occidentales* nella quale egli avrà certamente trattato dell'età di questi famosi *grès*, ma non mi fu dato di leggerla, non essendo giunto finora il fascicolo del Bollettino della Società geologica di Francia in cui è pubblicato.

(3) S. Franchi, *Contribuzione allo studio del Titonico e del Cretaceo delle Alpi Marittime italiane*, « Boll. R. Com. Geol. », 1894.

(4) *Études stratigraphiques sur le Nummulitique alpin. Mémoires pour servir à l'explication de la carte géologique détaillée de la France*, Paris, 1912.

J. Boussac morì da prode a Verdun, nel 1916, fra il rimpianto dei geologi francesi e stranieri. Egli rappresentava per la Geologia francese una fulgida speranza, sì che E. Haug nella cronologia scrittane potè dire « que la sciences française a perdu en J. Boussac un de ses porte-drapeaux ».

della grande importanza della questione, non solo dal punto di vista cartografico, ma anche da quello della storia geologica delle Alpi Marittime franco-italiane, nel 1916, con un apposito lavoro [1], mi sono accinto a dare la dimostrazione, suffragandola con carte geologiche e profili: 1° che al di qua del confine le arenarie, supposte oligoceniche dal Boussac, appartengono a due ben distinti orizzonti dell'Eocene, da me descritti fin dal 1894, e indicati, coi rispettivi limiti, nella carta geologica al 400.000, stampata nel 1908; 2° che pure eoceniche dovevano essere le arenarie segnate con la tinta dei *grès d'Annot* nelle più recenti carte geologiche francesi, nelle regioni attornianti il massiccio cristallino dell'Argentera (Mercantour) dall'Ubaye al Varo, alla Tinea, alla Vesubia e al mare, a Mentone.

In quel mio lavoro, che le vicende odierne dimostrano non essere privo d'importanza, per qualche capitolo della storia geologica delle Alpi Marittime franco-italiane, io riproducevo in nero, traendola dalla suddetta carta geologica, la parte orientale di queste Alpi, e davo, insieme ad altri, un profilo lungo il confine presso il Colle della Maddalena (fig. 3 della tav. VI) nel quale precisavo la posizione delle arenarie, supposte oligoceniche, attraversanti, ai due lati del confine, i valloni Pourriac e Lausannier [2], come immediatamente soprastanti, e in perfetta concordanza, al banco nummulitico basale, parisiano-auversiano, dell'Eocene ricoprente la serie secondaria autoctona, che avvolge il massiccio cristallino.

Io ho per di più cercato di dimostrare, aiutandomi con profili paleogeografici, come inammissibile la equiparazione cronologica che era stata fatta dai geologi francesi, tra le arenarie di Annot e l'Oligocene, tanto diverso, della zona esterna di Castellane; il che poteva sembrare ardito, non conoscendo io i luoghi, mentre ora appare una giusta intuizione della verità.

Io cercavo in seguito di estendere i risultati della mia dimostrazione ai *grès Mouchetés* e ai *grès de Taveyannaz*, scrivendo un apposito capitolo (pag. 314–319) sul « Supposto sincronismo dei *grès d'Annot* e dei *grès de Taveyannaz*, rispettivamente coll'Oligocene di Castellane e di Déserts », il quale capitolo così terminava: « Cosicchè l'età eocenica dei *grès Mouchetés*, tanto prossimi a quelli di Annot, e dei lontani *grès de Taveyannaz* e dei *grès du Flisch*, coi quali presentano frequenti passaggi (analogamente a quelli che abbiamo notati fra le arenarie ed il *Flysch* attorno al massiccio dell'Argentera), età che nessun dato permetteva di escludere, appare ora, per criterio di analogia, molto probabile; e lo stesso si potrà probabilmente

(1) *Le arenarie di Annot e la « zona ad Helminthoida » nell'Eocene delle Alpi Marittime e dell'Appennino Genovese*, « Boll. R. Comitato Geologico », 1916.

(2) Questa bellissima e tipica zona di arenarie in grossi banchi, potente circa 600 m., come risulta dal citato profilo, dove sono indicate le varie intercalazioni di scisti, è stata indicata come oligocenica per un buon tratto anche al di qua del confine, nel foglio di Larche della carta geologica francese all'80.000; tanto si riteneva sicura la sua posizione stratigrafica.

ancora dire dei *grès de Altdorf*, che sono a quelli un pò superiori, e che hanno, presso questo villaggio, una potenza da 1000 a 2000 metri. A così grande distanza sarebbe assurdo il pretendere di stabilire una corrispondenza fra le arenarie di Altdorf e le nostre "arenarie superiori" (1) e delle arenarie di Taveyannaz con le nostre "arenarie inferiori", ma una certa analogia nei due complessi scistoso-arenacei è manifesta, ed uno studio comparativo potrà riuscire molto interessante».

I recenti ritrovamenti di fossili, che dimostrano giusta la mia intuizione, potranno facilitare tale studio comparativo, tra l'Eocene svizzero-savoiardo e quello delle Alpi Marittime; ed è peccato che J. Boussac, il quale, per la conoscenza che aveva delle due regioni, era certo in grado di farlo brillantemente, abbia invece battuto una così falsa strada.

Quanto alle «trasformazioni notevoli di tutto un capitolo della storia della catena alpina» pronosticata nelle ultime frasi del lavoro di L. Moret, io ricorderò solo che in un capitolo speciale del mio lavoro più volte citato del 1916 «epoca dei ricoprimenti del Colle di Tenda e dell'Ubaye (pp. 321-322)», partendo dal fatto della inclusione di lembi di *grès d'Annot* e della «zona di Helminthoida» nelle masse carreggiate dell'Ubaye, io ne deducevo la anteoligocenicità dei rispettivi carreggiamenti e della emersione delle Alpi Marittime franco-italiane.

Le mie dimostrazioni erano parse tanto convincenti al compianto amico Kilian che, appena ricevuto un estratto del mio lavoro, ancora nel 1916, egli mi scriveva «che era perfettamente d'accordo con me e che, d'altra parte, egli aveva sempre pensato che esistessero nell'Ubaye vari orizzonti di arenarie». Questa franca dichiarazione da parte di W. Kilian, che era uno dei più autorevoli fra i geologi che avevano adottata la non esatta attribuzione cronologica dei *grès d'Annot*, lo onora altamente, come già ebbi a dire, lui vivente, in una nota ad un precedente lavoro, nella quale esprimevo l'augurio che tale giudizio venisse espresso in qualche scritto (2); e non v'ha dubbio che se egli avesse letta la nota del sig. Moret, lo avrebbe avvertito che la questione era stata da molto tempo risolta dai geologi italiani per i *grès d'Annot* e i *grès Mouchetés*, e molto chiaramente posta anche per i *grès de Taveyannaz*, alcuni anni prima che M. Lugeon vi avesse fatta la felice scoperta di foraminifere.

(1) «Arenarie superiori» io dissi quelle localmente tanto sviluppate nella «zona ad Helminthoida» e «arenarie inferiori» quelle molto sviluppate nella parte mediana inferiore del Priaboniano, come quelle di Pourriac-Lausannier. All'orizzonte di queste arenarie sovraicombono certamente nell'Ubaye, come nel bacino di S. Remo, parecchie centinaia, e a luoghi, qualche migliaio di metri di depositi eocenici, nei quali figurano gli scisti rossi papiracei caratteristici di un orizzonte sottostante alla «zona Helminthoida» e questa zona stessa, con arenarie, le quali corrisponderanno alle nostre arenarie superiori. Credo quindi inesatto il dire, come fa il Sig. Moret, che si tratti sempre *de faciès terminaux de l'Éocène.*

(2) «Rendiconti Accademia Lincei», vol. I, serie VI, I° sem., p. 286.

È superfluo che io parli del mio rammarico nel leggere l'ultima conclusione del sig. Moret, pel fatto che nella sua nota non vi è il minimo accenno alle nostre carte geologiche del 1894 e 1908, nè tampoco al mio lavoro del 1916, pubblicazioni ufficiali tutte che certo non mancano all'Istituto geologico dell'Università di Grenoble, avendo io già analogo rammarico espresso nella nota a piè di pagina sopra citata, per la trascuranza dei nostri lavori da parte di alcuni geologi d'oltralpe.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Forma canonica dei ds^2 per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici.* Nota di HARRY LEVY [1], presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [2].

1. Consideriamo una varietà o spazio curvo V_n, ad n dimensioni, la cui forma fondamentale [3],

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1.1}$$

abbia il discriminante $g = |g_{ij}|$ diverso da zero. È ben noto che, se V_n ha curvatura costante K_0, i suoi simboli di Riemann a quattro indici di prima specie sono della forma

$$R_{hijk} = K_0 (g_{hj}\, g_{ik} - g_{hk}\, g_{ij}) \qquad (h, i, j, k = 1, 2, \cdots n).$$

Se indichiamo con $R_{hijk,l}$ i simboli a cinque indici, che se ne ottengono per derivazione covariante, essendo nulla la derivata covariante del tensore fondamentale, si avrà

$$R_{hijk,l} = 0 \qquad (h, i, j, k, l = 1, 2, 3, \cdots n). \tag{1.2}$$

L'inverso però non sussiste; cioè una V_n la cui forma quadratica soddisfi alle (1.2) non ha necessariamente curvatura costante. Proponiamoci di ricavare una forma canonica di (1.1) nell'ipotesi che valgano le (1.2).

(1) National Research Fellow in Matematica (Stati Uniti).

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1925.

(3) Quando un indice figura due volte, una in *basso* ed una in *alto*, si sottintende una sommatoria relativa a questo indice da 1 ad n.

2. Siano $\lambda_{1|}{}^{i}\ \varepsilon\lambda_{2|}{}^{i}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ i parametri di due direzioni ortogonali fra loro. Pur trattandosi di un ds^2 eventualmente indefinito [1] (non necessariamente positivo) potremo ritenere

$$(2.1) \qquad \begin{cases} g_{ij}\,\lambda_{1|}{}^{i}\,\lambda_{2|}{}^{j} = 0 \\ g_{ij}\,\lambda_{\varepsilon|}{}^{i}\,\lambda_{\varepsilon|}{}^{j} = e_{\varepsilon} \qquad (\varepsilon = 1, 2), \end{cases}$$

dove e_1 ed e_2 sono uguali a ± 1. La curvatura Riemanniana di V_n relativa alla giacitura $(\lambda_{1|}\,\lambda_{2|})$ è

$$(2.2) \qquad K = e_1\, e_2\, R_{ijkl}\,\lambda_{1|}{}^{i}\,\lambda_{2|}{}^{j}\,\lambda_{1|}{}^{k}\,\lambda_{2|}{}^{l}.$$

Siano $\lambda^i\,(i = 1, 2, \cdots n)$ i parametri di un'altra congruenza e supponiamo che le direzioni $\lambda_{\varepsilon|}$ formino due serie di parallele (nel senso del prof. Levi-Civita) lungo le linee della congruenza λ^i. Dovrà perciò essere [2]

$$(2.3) \qquad \lambda_{\varepsilon|}{}^{i}{}_{,j}\lambda^{j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n;\ \ \varepsilon = 1, 2),$$

dove $\lambda_{\varepsilon|}{}^{i}{}_{,j}$ è la derivata covariante di $\lambda_{\varepsilon|}{}^{i}$ rispetto alla forma (1.1). Se le equazioni (1.2) son soddisfatte, segue dalla (2.2) mediante le (2.3) che K *è costante lungo le linee della* λ^i. Reciprocamente, se la curvatura Riemanniana è costante sopra ogni linea in giaciture che restino parallele lungo quella linea, valgono le equazioni (1.2) [3].

Si consideri un punto P, ed una direzione per P; si può ottenere una direzione per un punto qualsiasi, Q, dal trasporto parallelo della direzione iniziale lungo una linea generica C; se si varia la linea C si ottengono direzioni diverse per Q. Intanto se si designa con K_1 il valore della curvatura di V_n per una data coppia di direzioni per P, esiste per ogni punto di V_n una stella, Σ, di direzioni tale che la curvatura di V_n per ogni coppia di direzioni appartenenti a Σ è K_1. Possiamo osservare di più che il *numero di direzioni indipendenti in* Σ *non varia da punto a punto*; se un certo numero di direzioni indipendenti si trasportano parallelamente da un punto P a un secondo Q, esse restano indipendenti [4]; dunque il numero totale di direzioni indipendenti della Σ per Q non può essere minore di quello per P. Ma P e Q sono punti generici, e pertanto i due numeri devono essere uguali. Indichiamo con p_1 il numero corrispondente alla curvatura K_1.

(1) Vedasi Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (A. Stock, Roma), p. 161. Cfr. anche un libro di prossima pubblicazione del prof. Eisenhart (Princeton University Press, Princeton, N. J., Stati Uniti), dove si considerano soltanto ds^2 indefiniti.

(2) Vedasi, Levi-Civita, loc. cit., p. 158.

(3) Vedasi la mia nota: *Tensors Determined by a Hypersurface in a Riemann Space*, « Transactions of the American Mathematical Society », 1926.

(4) Vedasi Bompiani, *Del parallelismo in una varietà qualunque*, « Atti del Reale Istituto Veneto », LXXX (1921), p. 371.

Segue di qui, fissando in particolare l'attenzione sopra una direzione, che se si trasporta parallelamente fino ad un punto Q una direzione qualsiasi appartenente alla stella Σ di un punto P, la direzione ottenuta per Q appartiene alla Σ di Q, *qualunque sia la linea lungo la quale il parallelismo è definito.*

3. Ora introduciamo una *ennupla ortogonale*, cioè, n vettori unitari di parametri $\lambda_{\alpha|}{}^{i}$ $(\alpha, i = 1, 2, \cdots n)$ soddisfacenti alle equazioni

$$g_{ij}\,\lambda_{k|}{}^{i}\lambda_{l|}{}^{j} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ e_k & k = l \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \cdots n), \tag{3.1}$$

dove e_k è uguale a ± 1. Possiamo supporre di più che i primi p_1 vettori $\lambda_{\alpha|}{}^{i}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots p_1)$ appartengano alla stella Σ.

Siano $\mu_{kl|}{}^{i}$ i vettori generati dal trasporto parallelo di $\lambda_{k|}$ lungo le linee della congruenza $\lambda_{l|}$ e coincidenti in un punto fisso P con $\lambda_{k|}$. L'angolo ω_{klh} fra $\mu_{kl|}$ e $\lambda_{h|}$ è dato allora da

$$\cos\omega_{klh} = g_{ij}\,\mu_{kl|}{}^{i}\,\lambda_{h|}{}^{j},$$

ed i risultati del paragrafo precedente mostrano che

$$\cos\omega_{\alpha lr} \equiv 0 \tag{3.2}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots p_1 \quad ; \quad r = p_1 + 1, \cdots n \quad ; \quad l = 1, 2, \cdots n).$$

Se denotiamo con γ_{hkl} *i coefficienti di rotazione* di Ricci,

$$\gamma_{hkl} = \lambda_{h|i,j}\,\lambda_{k|}{}^{i}\,\lambda_{l|}{}^{j} \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots n) \tag{3.3}$$

dove $\lambda_{h|i} = g_{ij}\,\lambda_{h|}{}^{j}$ sono i momenti e $\lambda_{h|i,j}$ sono le derivate covarianti di $\lambda_{h|i}$ rispetto alle forma (1.1), varranno sempre le relazioni

$$\left.\frac{\partial\cos\omega_{ijk}}{\partial s_j}\right|_{P} = \gamma_{kij} \ ^{(1)}, \tag{3.4}$$

dove $\dfrac{\partial}{\partial s_j} = \lambda_{j|}{}^{i}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Otteniamo perciò in questo caso mediante le (3.2) che

$$\gamma_{r\alpha j} = 0 \tag{3.5}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots p_1 \quad ; \quad r = p_1 + 1, \cdots n \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots n).$$

(1) Vedasi Levi-Civita, loc. cit., p. 285. Anche Lipka, *On Ricci's coefficients of rotation*, « Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology », vol. 3 (1924), o la mia nota, « Bulletin of the American Mathematical Society », vol. 31 (1925), p. 143.

Ma le equazioni (3.5) esprimono le condizioni sufficienti affinchè le congruenze $\lambda_{\alpha|}{}^{i}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots p_1)$ siano normali ad una famiglia, ∞^{p_1}, di varietà, V_{n-p_1}, di $n-p_1$ dimensioni e affinchè le congruenze $\lambda_{r|}{}^{i}$ $(r = p_1 + 1, \cdots n)$ siano normali ad una famiglia V_{p_1} di p_1 dimensioni (1). Ma è sempre possibile, mediante una trasformazione di coordinate, ritenere la famiglia V_{n-p_1} definita mediante le equazioni

$$x^{\alpha} = c_{\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots p_1), \tag{3.6}$$

dove le costanti arbitrarie c_{α} sono i parametri della famiglia; analogamente la famiglia V_{p_1} mediante le equazioni

$$x^{r} = c_{r} \qquad (r = p_1 + 1, \cdots n). \tag{3.7}$$

Dunque

$$\lambda_{\alpha|r} = 0 \quad , \quad \lambda_{r|\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots p_1 \; ; \; r = p_1 + 1, \cdots n). \tag{3.8}$$

Di più ciascuna ipersuperficie $x^{\alpha} =$ costante $(\alpha = 1, 2, \cdots p_1)$ è ortogonale a tutte le ipersuperfici $x^{r} =$ costante $(r = p_1 + 1, \cdots n)$. Perciò

$$g_{\alpha r} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots p_1 \; ; \; r = p_1 + 1, \cdots n). \tag{3.9}$$

Possiamo esprimere $\lambda_{h|i,j}$ in funzione delle $\lambda_{h|k}$ e delle γ_{hij} ottenendo dalle (3.3) (2)

$$\lambda_{h|i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} e_k e_l \gamma_{hkl} \lambda_{k|i} \lambda_{l|j} \qquad (h, i, j = 1, 2, \cdots n). \tag{3.10}$$

Mediante le (3.5) è le (3.8) abbiamo dalle (3.10) che

$$\lambda_{r|\alpha,j} = 0 \tag{3.11}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots p_1 \; ; \; r = p_1 + 1, \cdots n \; ; \; j = 1, 2, \cdots n).$$

Segue da ciò, per le (3.8) stesse, che i simboli di Christophel $\left\{ \begin{matrix} \alpha j \\ r \end{matrix} \right\}$ si annullano, e dalle (3.9) anche $\left[\begin{matrix} \alpha j \\ r \end{matrix} \right]$. Dunque $g_{\alpha\beta}$ sono indipendenti da x^{r}

(1) Vedasi la mia nota: *Normal Congruences of Curves in Riemann Space*, « Bulletin American Math. Society », vol. 31 (1925), p. 41.

(2) Questo risultato nel caso che (1.1) sia una forma indefinita è dovuto all'Eisenhart e si troverà nel suo libro, già citato. Nel caso di una forma definita risale notoriamente al Ricci, Cfr. *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, « Memorie della R. Accad. dei Lincei » (5), vol. 2 (1895), p. 276).

e g_{rs} da x^α ($\alpha, \beta = 1, 2, \cdots p_1$; $r, s = p_1 + 1, \cdots n$). La forma (1.1) quindi diviene

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 \tag{3.12}$$

dove $d\sigma_1^2$ è una forma in p_1 variabili e $d\sigma_2^2$ in $n - p_1$ variabili. Inoltre dalle osservazioni del § 2 segue che $d\sigma_2^1$ ha curvatura costante K_1.

Le condizioni fondamentali (1.2) si riducono ora alla condizione che si annullino gli $R_{ijkl,h}$ formati rispetto al $d\sigma_2^2$. Ma possiamo operare sulla forma $d\sigma_2^2$ precisamente nello stesso modo come sul ds^2 e otterremo infine [1]

$$ds^2 = \sum_\alpha d\sigma_\alpha^2 \tag{3.13}$$

e abbiamo il teorema:

Se la forma quadratica (1.1) *ha nulli i simboli di Riemann a cinque indici, si può ridurre con una trasformazione conveniente di coordinate alla somma di* $d\sigma^2$ *a curvatura costante e tali che le* x *da cui dipende un* $d\sigma_\alpha^2$ *non compaiono in nessuno degli altri.*

Meccanica. — *Sur le cas de la collision générale dans le problème des trois corps.* Nota di ALFREDO ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

M. Levi-Civita a montré dans une série de Notes publiées dans ce Recueil [2] ainsi que dans un Mémoire des « Acta Mathematica » [3] que les équations du mouvement de trois corps dans le cas où le vecteur des aires n'est pas nul peuvent être mises sous une forme canonique qui reste régulière au voisinage d'un choc de deux de ces corps.

Le cas exceptionnel d'une collision générale a été traité successivement par MM. Sundman [4], Block [5] et Chazy [6]. Le deuxième auteur a donné des développements suivant les puissances du temps t (en supposant $t = 0$ l'instant du choc), dont les exposants dépendent des rapports des masses.

(1) Le forme che si possono ridurre ad un somma di forme, come la (3.13) sono già state ottenute. Vedasi per esempio: EISENHART, *Symmetric Tensors of the Second Order Whose Covariant Derivatives Vanish*, « Transactions of the American Mathematical Society », vol. 25 (1923), p. 303.

(2) Vol. XXIV, pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569; vol. XXV, pp. 445-458.

(3) Vol. 42, pp. 99-144.

(4) « Acta Societatis Scientiarum Fennicae », to. XXXIV, 1907.

(5) « Arkiv för Matematik och Fysik », to. 5, 1909.

(6) « Bulletin Astronomique », to. XXXV, 1918.

M. Chazy a prouvé ensuite qu'il n'y a pas d'autres mouvements que ceux étudiés pas M. Block, en montrant que la figure-limite qui est un triangle équilatéral ou bien une droite est d'une orientation invariable dans l'espace.

On peut se demander si l'on ne puisse pas mettre les équations du mouvement de ces cas sous une forme qui soit canonique et à singularité simple au point du choc général. C'est ce que nous nous proposons de montrer en nous bornant pour le moment au cas du triangle équilatéral limite.

1. Envisageons trois corps P_0, P, P' de masses m_0, m, m' et écrivons le système d'équations canoniques correspondant aux coordonnées de Poincaré (*Leçons de Mécanique céleste*, Tome I, ch. 2). Les corps P, P' sont rapportés au corps P_0, x_i, x'_i, $i = 1,2$ étant les coordonnées relatives. p_i, p'_i, $i = 1,2$, désignent les quantités absolues du mouvement des deux corps P, P'.

La force vive totale τ s'exprime de la façon suivante

$$(1)\qquad \tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)(p_1^2+p_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m'}\right)(p_1'^2+p_2'^2) + \frac{1}{m_0}(p_1p'_1+p_2p'_2)$$

et la fonction U des forces est

$$(2)\qquad U = \frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{m m'}{\Delta},$$

r, r', Δ désignant les distances P_0P, P_0P', PP'.

Nous envisageons les trajectoires qui correspondent à une valeur fixe E de la constante d'énergie et nous introduisons la fonction

$$(3)\qquad H^* = r^2(H - E) = r^2(\tau - U) - r^2 E.$$

Les trajectoires envisagées sont donc celles pour lesquelles on a

$$(4)\qquad H^* = 0.$$

Les orbites sont planes et on a l'intégrale des aires

$$(5)\qquad p_1x_2 - p_2x_1 + p'_1x'_2 - p'_2x'_1 = 0.$$

La transformation canonique des variables dépendantes que nous emploierons est modelée d'après celle employée pour le problème plan par M. Levi-Civita. Nous remplaçons tout d'abord la variable

$$x = x_1 + ix_2$$

par la variable

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2$$

au moyen de la transformation

$$x = \zeta^2. \tag{6}$$

En second lieu on pose

$$x' = \alpha\zeta^2(1 + \zeta')^2, \tag{7}$$

où l'on a

$$x' = x'_1 + ix'_2,$$
$$\zeta' = \xi'_1 + i\xi'_2,$$
$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Nous introduisons ensuite au lieu des variables p_i, p'_i des variables nouvelles π_i, π'_i au moyen des formules

$$p' = \frac{\pi}{2\,\overline{\alpha}\,\overline{\zeta}^2(1 + \overline{\zeta}')} \tag{8}$$

$$p = \frac{\pi}{2\overline{\zeta}} - \frac{\pi'}{2\overline{\zeta}^2}(1 + \overline{\zeta}'), \tag{9}$$

où l'on a

$$p = p_1 + ip_2,$$
$$p' = p'_1 + ip'_2,$$
$$\pi = \pi_1 + i\pi_2,$$
$$\pi' = \pi'_1 + i\pi'_2,$$

et où les traits dénotent des quantités conjuguées. On a la relation

$$\overline{p}\,dx + \overline{p}'\,dx' = \overline{\pi}\,d\zeta + \overline{\pi}'\,d\zeta' \tag{10}$$

et le changement est canonique.

Les variables $\zeta, \overline{\zeta}, \pi, \overline{\pi}$; $\zeta', \overline{\zeta}', \pi', \overline{\pi}'$ satisfont au système canonique d'équations suivant

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dt} = 2\dfrac{\partial H}{\partial \overline{\pi}} \quad , \quad \dfrac{d\overline{\zeta}}{dt} = 2\dfrac{\partial H}{\partial \pi}, \\ \dfrac{d\pi}{dt} = -2\dfrac{\partial H}{\partial \overline{\zeta}} \quad , \quad \dfrac{d\overline{\pi}}{dt} = -2\dfrac{\partial H}{\partial \zeta}, \\ \dfrac{d\zeta'}{dt} = 2\dfrac{\partial H}{\partial \overline{\pi}'} \quad , \quad \dfrac{d\overline{\zeta}'}{dt} = 2\dfrac{\partial H}{\partial \pi'}, \\ \dfrac{d\pi'}{dt} = -2\dfrac{\partial H}{\partial \overline{\zeta}'} \quad , \quad \dfrac{d\overline{\pi}'}{dt} = -2\dfrac{\partial H}{\partial \zeta'}. \end{cases}$$

2. Voici l'expression de H^* au moyen des variables nouvelles

$$(12)\quad \begin{cases} H^* = -E\zeta^2\overline{\zeta}^2 - \zeta\overline{\zeta}\left\{ m_0 m + \dfrac{m_0 m'}{(1+\zeta')(1+\overline{\zeta}')} + \right. \\ \left. + \dfrac{mm'}{(\overline{\alpha} - 2\alpha\zeta' - \alpha\zeta'^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha - 2\overline{\alpha}\overline{\zeta}' - \overline{\alpha}\overline{\zeta}'^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} + \\ + \frac{1}{8}\left\{ \pi\overline{\pi}\zeta\overline{\zeta}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right) + \pi'\overline{\pi}'\left[\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)(1+\zeta')(1+\overline{\zeta}') + \right.\right. \\ + \left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m'}\right)\frac{1}{(1+\zeta')(1+\overline{\zeta}')} - \frac{1}{m_0}\left[\frac{\overline{\alpha}(1+\overline{\zeta}')}{1+\zeta'} + \frac{\alpha(1+\zeta')}{1+\overline{\zeta}'}\right]\Big] + \\ + \pi\overline{\pi}'\overline{\zeta}\left[\frac{\overline{\alpha}}{m_0(1+\zeta')} - \left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)(1+\zeta')\right] + \overline{\pi}\pi'\zeta\left[\frac{\alpha}{m_0(1+\overline{\zeta}')} - \right. \\ \left.\left. - \left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)(1+\overline{\zeta}')\right]\right\}. \end{cases}$$

Si l'on se borne aux termes du second ordre en $\zeta', \overline{\zeta}'$ on a les expressions

$$(13)\quad r^2 U = \zeta\overline{\zeta}\left\{ m_0 m + m_0 m' + mm' - \zeta' m'(m_0 + \overline{\alpha} m) - \overline{\zeta}' m'(m_0 + \alpha m) + \right.$$

$$\left. + \zeta'\overline{\zeta}' m'(m_0 + m) + \zeta'^2 m\left[m_0 - \frac{1}{2} m(3\alpha + \overline{\alpha})\right] + \overline{\zeta}'^2 m'\left[m_0 - \frac{1}{2} m(3\overline{\alpha} + \alpha)\right]\right\},$$

$$
(14)\quad
\left\{
\begin{aligned}
r^2\tau = \frac{1}{8}\Big\{ & \pi\bar{\pi}\zeta\bar{\zeta}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}\right)+\pi'\bar{\pi}'\left[\frac{1}{m_0}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}+\right.\\
& \left.+\zeta'\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}+\frac{1}{m_0}(\bar{\alpha}-\alpha)\right]+\bar{\zeta}'\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}+\frac{1}{m_0}(\alpha-\alpha)\right]+\right.\\
& \left.+\zeta'\bar{\zeta}'\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}+\frac{3}{m_0}\right)+\zeta'^2\left(\frac{1}{m'}+\frac{\alpha}{m_0}\right)+\bar{\zeta}'^2\left(\frac{1}{m'}+\frac{\bar{\alpha}}{m_0}\right)\right]+\\
& +\pi\bar{\pi}'\bar{\zeta}\left[-\left(\frac{1}{m}+\frac{\alpha}{m_0}\right)-\zeta'\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_0}(1+\bar{\alpha})\right]+\zeta'^2\frac{\bar{\alpha}}{m_0}\right]+\\
& +\bar{\pi}\pi'\zeta\left[-\left(\frac{1}{m}+\frac{\bar{\alpha}}{m_0}\right)-\bar{\zeta}'\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{m_0}(1+\alpha)\right]+\bar{\zeta}'^2\frac{\alpha}{m_0}\right]\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme variable indépendante nous choisirons la variable z définie par la relation

$$(15)\qquad \frac{1}{z}=\int_t^0 \frac{dt}{r^2}\quad,\qquad (16)\quad t=-\int_0^z r^2\frac{dz}{z^2}.$$

On sait que z s'exprime au moyen de t par la formule

$$(17)\qquad z=-\frac{k^2}{3}t^{\frac{1}{3}}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro et k étant le nombre

$$(18)\qquad k=\sqrt[3]{\frac{9}{2}M}\quad,\quad M=m_0+m+m'.$$

Les équations (11) prennent la forme *singulière canonique* suivante

$$
(19)\quad
\left\{
\begin{aligned}
z^2\frac{d\zeta}{dz}&=-2\frac{\partial H^x}{\partial\bar{\pi}}\quad,\quad z^2\frac{d\bar{\zeta}}{dz}=-2\frac{\partial H^x}{\partial\pi},\\
z^2\frac{d\pi}{dz}&=2\frac{\partial H^x}{\partial\bar{\zeta}}\quad,\quad z^2\frac{d\bar{\pi}}{dz}=2\frac{\partial H^x}{\partial\zeta},\\
z^2\frac{d\zeta'}{dz}&=-2\frac{\partial H^x}{\partial\bar{\pi}'}\quad,\quad z^2\frac{d\bar{\zeta}'}{dz}=-2\frac{\partial H^x}{\partial\pi'},\\
z^2\frac{d\pi'}{dz}&=2\frac{\partial H^x}{\partial\bar{\zeta}'}\quad,\quad z^2\frac{d\bar{\pi}'}{dz}=2\frac{\partial H^x}{\partial\zeta'},
\end{aligned}
\right.
$$

et on a l'intégrale des aires

$$(20)\qquad \pi\bar{\zeta}-\bar{\pi}\zeta=0.$$

3. Comme triangle équilatéral limite nous choisirons le triangle donné par la solution suivante

$$\zeta = \overline{\zeta} = \zeta^\circ \chi, \zeta^\circ = \frac{3}{\sqrt{k^3}}, \tag{21}$$

$$\zeta' = \overline{\zeta}' = 0.$$

A ces valeurs correspondent les valeurs suivantes des variables π, π'

$$\left\{\begin{aligned} &\pi = \overline{\pi} = \pi^\circ = -\frac{4}{3}\sqrt{k^3}\,\frac{m}{M}, \\ &\pi' = \pi'^\circ \chi, \pi'^\circ = -4\,\frac{m'}{M}(m_0 + \alpha m), \\ &\overline{\pi}' = \overline{\pi}'^\circ \chi, \overline{\pi}'^\circ = -4\,\frac{m'}{M}(m_0 + \overline{\alpha} m). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Cette solution correspond à la valeur 0 de la constante E de l'énergie.

Changeons les variables ζ, π en des variables Z, Π au moyen de la transformation suivante

$$\left\{\begin{aligned} &\zeta = \chi(\zeta^\circ + Z) \quad , \quad \overline{\zeta} = \chi(\zeta^\circ + \overline{Z}), \\ &\pi = \pi^\circ + \Pi \quad , \quad \overline{\pi} = \pi^\circ + \overline{\Pi}, \\ &\zeta' = Z' \quad , \quad \overline{\zeta}' = \overline{Z}', \\ &\pi' = \chi(\pi'^\circ + \Pi') \quad , \quad \overline{\pi}' = \chi(\overline{\pi}'^\circ + \overline{\Pi}'). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

D'après le résultat mentionné de M. Chazy, le Z et les Π tendent avec χ vers zéro.

On a la relation

$$\Sigma \zeta d\overline{\pi} = \chi(\Sigma Z d\overline{\Pi} - dW) + dS, \tag{24}$$

W étant donné par la formule

$$W = Z'(\overline{\pi}'^\circ + \overline{\Pi}') + \overline{Z}'(\pi'^\circ + \Pi') - \zeta^\circ(\Pi + \overline{\Pi}), \tag{25}$$

et dS étant une différentielle exacte.

Donc, en désignant par Φ la fonction

$$\Phi = -\frac{2H^x}{\chi^2} + W, \tag{26}$$

on a le système suivant d'équations différentielles

$$(27)\quad \begin{cases} \zeta \dfrac{dZ}{d\zeta} + Z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \overline{\Pi}} \quad , \quad \zeta \dfrac{d\overline{Z}}{d\zeta} + \overline{Z} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \Pi}, \\ \zeta \dfrac{d\Phi}{d\zeta} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial \overline{Z}} \quad , \quad \zeta \dfrac{d\overline{\Pi}}{d\zeta} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z}, \\ \zeta \dfrac{dZ'}{d\zeta} + Z' = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \overline{\Pi}'} \quad , \quad \zeta \dfrac{d\overline{Z}'}{d\zeta} + \overline{Z}' = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \Pi'}, \\ \zeta \dfrac{d\Pi'}{d\zeta} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial \overline{Z}'} \quad , \quad \zeta \dfrac{d\overline{\Pi}'}{d\zeta} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial Z'}. \end{cases}$$

Fisica. — *Circa alcune nuove ricerche sulla birifrangenza accidentale dei colloidi in movimento.* — Nota [1] di A. Pontremoli presentata dal Socio Majorana.

Il Graffi in una recente Nota [2] comunica alcuni interessanti risultati sulla birifrangenza del Ferro Bravais in moto in tubi a sezione rettangolare: per certi campioni egli osserva oscurità completa con nicol incrociati a sezione principale parallela all'asse del tubo, mentre - per nicol incrociati e sezione a 45° dall'asse - si manifesta campo uniformemente luminoso, circostanza questa presente anche per altri liquidi i quali rivelano invece - colla prima disposizione - una frangia centrale.

Le esperienze da me eseguite su Ferro Bravais in moto in un tubo cilindrico non davano variazioni nell'aspetto del campo per polarizzatore nell'uno o nell'altro orientamento, onde vi è luogo di attribuire i nuovi risultati vuoi alle mutate condizioni cinematiche vuoi alla differenza del liquido ora notevolmente dicroico.

È possibile dedurre dalle esperienze del Graffi, mediante la teoria da me svolta sulla birifrangenza dei liquidi in movimento [3], notizia alcuna sulle circostanze cinematiche che accompagnano il defluire del liquido nel tubo a sezione rettangolare?

La mia teoria è strettamente rigorosa solo nel caso che le velocità di dilatazione e di scorrimento, pur variando nel campo, siano però costanti

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Complementare della R. Università di Milano.

(2) Graffi, questi «Rendiconti», 1926, vol. III, 1, p. 28.

(3) Pontremoli, «Memorie R. Accad. Lincei», XIII, p. 593, 1921; «Rend. R. Accademia Lincei», XXX, p. 216, 1921.

per tutti i punti di uno stesso asse parallelo a quello di osservazione: tutti i piani perpendicolari a detto asse debbono quindi esser sede di fenomeni eguali ed egualmente distribuiti. L'esperienza mi ha tuttavia dimostrato che la teoria può essere estesa ad un liquido defluente in un tubo circolare, pur non essendo in questo caso presenti le condizioni di cui sopra: supporremo che le formule generali risultino valide anche per il moto ora considerato in un tubo a sezione rettangolare.

La variazione osservata dal Graffi col ruotare dei nicol non può essere relativa che alle frangie della prima famiglia; rammentiamo l'espressione della intensità della luce emergente

$$I = I_0 \operatorname{sen}^2 2 (\Phi_\tau - \varphi) \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta_\tau}{2} ;$$

avendo il Graffi ottenuto, per $\varphi = 0$, campo completamente oscuro, dovrà essere sempre $\Phi_\tau = \frac{k\pi}{2}$ e quindi ovunque $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, detti u la componente della velocità nella direzione OX del moto, OZ l'asse di osservazione. Tale condizione esprime che le particelle hanno in ogni punto un asse principale di dilatazione parallelo alla sezione principale del polarizzatore e quindi all'asse del tubo.

Esaminiamo cosa avviene con i nicol a 45°: ora I può annullarsi solo per $\Delta_\tau = 2k\pi$; il fatto che il Graffi, per certi campioni, non osserva frangie oscure prova che, nelle sue condizioni, non si ha mai

$$\frac{s_\tau n^3}{\lambda c^2} pT \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

e, in particolare, che in nessun punto del campo osservato è $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Il fatto che esiste luminosità ci prova che i liquidi impiegati sono convenientemente sensibili (hanno cioè un coefficiente pT abbastanza elevato) e dobbiamo quindi attenderci che, mutando la velocità o le altre caratteristiche contenute nella formula, possano apparire alcune frangie della II famiglia, indipendenti dalla posizione del piano di polarizzazione e la cui forma sarà individuata dalla differenza delle due velocità di dilatazione contemplate, nei vari punti del piano perpendicolare all'asse di osservazione.

Il Graffi ritiene necessario, per spiegare i propri risultati, di distinguere due tipi di birifrangenza diversi: l'una dovuta all'orientamento, l'altra alla deformazione interna del mezzo. La mia teoria tiene appunto conto dell'orientamento delle particelle e della loro deformazione, collegandosi questi due effetti punto per punto, in armonia con i concetti classici del moto dei fluidi: è quindi interessante rilevare come il Graffi verifichi sperimentalmente che

l'orientamento delle particelle è proprio quale i calcoli ora svolti lasciano prevedere.

Ed è ancora rimarchevole che, opportunamente eliminati dal Graffi gli effetti del dicroismo, la misura diretta dello spostamento di fase delle due componenti della vibrazione ellittica emergente gli consenta di calcolare, applicando le mie formule, il valore delle costanti del Ferro Bravais che intervengono nel fenomeno. Le mie determinazioni, dalla posizione delle frangie, davano $2,3 \cdot 10^{19}$: le sue misure, dallo sfasamento, $1,4 \cdot 10^{19}$. Data la diversità dei liquidi, ammettendo che la teoria sia rigorosamente applicabile, l'accordo è insperato.

Queste nuove conferme [1] inducono ad attendersi che, dalla osservazione della birifrangenza dei liquidi in moto, si apra un proficuo campo di attività per il diretto controllo dei risultati teorici della idrodinamica o per la individuazione delle circostanze cinematiche che accompagnano un determinato moto di un fluido.

Mi è gradito ringraziare il prof. Majorana e il dott. Graffi per la cortese anticipata comunicazione dei risultati ottenuti.

Fisica. — *Sulla propagazione di correnti elettriche stazionarie sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota di ELENA FREDA, presentata dal Socio VOLTERRA.

Se ci si basa sulla teoria elettronica di Drude, per la propagazione di correnti elettriche stazionarie in un conduttore omogeneo ed isotropo posto in un campo magnetico uniforme (quando la temperatura possa ritenersi uguale in tutti i punti), si ottengono equazioni del tipo

$$(1)\quad \begin{cases} j_x = -K\dfrac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ j_y = -\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial x} - K\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ j_z = -\sigma\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \qquad (1)'\quad \begin{cases} j_x = -K\dfrac{\partial V}{\partial x} - \varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ j_y = +\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial x} - K\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ j_z = -\sigma\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

(con il campo $\mathbf{H}$) (con il campo $-\mathbf{H}$)

nelle quali $\boldsymbol{j}$ è la densità di corrente; V il potenziale; $K\,\varepsilon\,\sigma$ sono coefficienti che, per un dato metallo e per una data intensità del campo, hanno

(1) Nel moto di un colloide in un cilindro rotante sono state osservate le frangie circolari della II famiglia, previste nella Memoria.

determinati valori, costanti in tutti i punti del conduttore; xyz sono tre assi ortogonali, dei quali il terzo diretto come $\mathbf{H}$ [1].

Ad equazioni del tipo (1) (1)′ si giunge anche se ci si basa sulla teoria elettronica di Lorentz [2]; solo nelle due teorie $K\varepsilon\sigma$ dipendono in modo diverso (più complicato secondo la teoria di Lorentz) dalle costanti elettroniche del metallo e dall'intensità h del campo.

Ma le (1) (1)′ si possono stabilire (lasciando indeterminate le leggi di dipendenza di $K\varepsilon\sigma$ dalla natura del metallo e dall'intensità del campo) anche indipendentemente da ogni teoria riguardante l'intima natura delle correnti, se si ammette che $j_x\ j_y\ j_z$ debbano essere funzioni lineari omogenee delle derivate di V: basta tener presente che, essendo il conduttore isotropo senza campo, direzioni ugualmente orientate rispetto ad un dato campo debbono essere equivalenti. (Uguagliamo $j_x\ j_y\ j_z$ a tre generiche funzioni lineari omogenee delle derivate di V: i coefficienti, poichè il conduttore è omogeneo ed il campo è uniforme, dovranno essere indipendenti da xyz; imponendo alle equazioni scritte di rimanere inalterate quando gli assi xy ruotino intorno all'origine perpendicolarmente al campo, si trova che le dette equazioni debbono, per un determinato campo $\mathbf{H}$, essere del tipo (1). Poichè il triedro $y, x, -z$ si trova rispetto al campo $\mathbf{H}$ nelle identiche condizioni in cui il triedro xyz si trova rispetto a $-\mathbf{H}$, scambiando nelle (1) x con y e z con $-z$ si debbono ottenere le equazioni valide con il campo $-\mathbf{H}$: si trovano così le (1)′).

Nello studio del fenomeno in questione, oltre che delle equazioni (1) (1)′, si deve tenere conto della condizione div. $\boldsymbol{j} = 0$, delle condizioni che caratterizzano gli elettrodi puntiformi e quelli di resistenza trascurabile, della condizione che caratterizza l'isolamento elettrico del conduttore lungo una parte del contorno.

Dalle prime due equazioni (1) (tenendo conto delle condizioni cui ora ho accennato, ma senza far entrare in questione il modo di dipendenza di K ed ε dalle proprietà del metallo e dall'intensità del campo) si deduce, per una lamina disposta trasversalmente nel campo $\mathbf{H}$, che l'effetto Hall (quando la corrente entra ed esce da elettrodi puntiformi situati al contorno [3]) e l'effetto Corbino sono proporzionali rispettivamente a $\frac{\varepsilon}{K^2 + \varepsilon^2}$ [4] ed a $\frac{\varepsilon}{K}$ [5]; che le apparenti variazioni di conducibilità specifica, quando la lamina è

(1) Cfr., per il caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo, CORBINO, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem., 1915, p. 213; per il caso di un conduttore a 3 dimensioni, FREDA, «Rend. Acc. dei Lincei», 2° sem., 1916, p. 106.

(2) Cfr., per il caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo, GANS, «Annalen der Physik», 1906, XX, p. 293.

(3) VOLTERRA, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem., 1915, p. 294.

(4) CORBINO, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem., 1915, p. 213.

(5) FREDA, «Rend. Acc. dei Lincei», 2° sem., 1916, p. 146.

munita di elettrodi puntiformi al contorno e quando, avendo forma di disco, è munita al centro ed alla periferia di elettrodi di resistenza trascurabile, sono rispettivamente $\sigma_0 - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K}$, $\sigma_0 - K$ (σ_0 conducibilità fuori del campo) [1].

Lo studio sperimentale, per un dato metallo, dell'andamento di questi fenomeni al variare dell'intensità h del campo può permettere di determinare sperimentalmente, per quel metallo, le leggi di dipendenza di K ed ε da h.

Quanto al coefficiente σ, esso rappresenta la conducibilità specifica di un conduttore percorso da correnti aventi la direzione del campo: anche tale conducibilità può essere determinata sperimentalmente, per un dato metallo, in corrispondenza ai diversi valori di h.

Il prof. Trabacchi ha misurato sperimentalmente, per diversi valori di h, l'apparente conducibilità specifica K di un disco (disposto trasversalmente nel campo) munito al centro ed alla periferia di elettrodi di resistenza trascurabile [2]; secondo i risultati di queste misure, si deve ritenere sia K una funzione di h che solo per $h = 0$ coincide con la conducibilità specifica σ_0 fuori del campo. (Si può osservare che ciò è previsto dalla teoria elettronica, sia che ci si basi sulle ipotesi di Drude, sia che ci si basi su quelle di Lorentz).

Gli effetti Hall e Corbino, implicano debba essere ε una funzione di h annullantesi per $h = 0$.

Le misure sperimentali che sono state fatte della conducibilità di un conduttore percorso da correnti nella direzione del campo, inducono a ritenere debba essere anche σ una funzione di h (coincidente con σ_0 per $h = 0$).

Tutto ciò può essere stabilito, indipendentemente da ogni ipotesi elettronica.

Indichiamo con $\gamma\, \alpha_1\, \alpha_2$ le omografie che, secondo le (1) (1)′, fanno passare dal vettore Grad. V al vettore $\boldsymbol{j}$ rispettivamente con il campo nullo, con il campo $\mathbf{H}$ e con il campo $-\mathbf{H}$. Tali omografie sono individuate rispettivamente dai coefficienti

$$\begin{vmatrix} -\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -K & +\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -K & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -K & -\varepsilon & 0 \\ +\varepsilon & -K & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix}.$$

Si può osservare che α_1 e α_2 sono omografie coniugate (cioè dette δ ed ω la dilatazione e l'omografia assiale di cui è somma α_1, si ha $\alpha_2 = \delta - \omega$);

(1) Corbino, «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem., 1919, pp. 52, 53.
(2) «Nuovo Cimento», vol. XVI, p. 209.

ma, dato ciò che le esperienze ci insegnano sui coefficienti K, σ, σ_0, l'omografia $(\alpha_1 - \gamma)$ non si può ritenere uguale all'omografia $-(\alpha_2 - \gamma)$ (la dilatazione δ non coincide con l'omotetia γ [1]).

Ho voluto fare queste osservazioni sulle omografie α_1 α_2 per mostrare perchè non mi sembri accettabile una ipotesi introdotta in una recente Nota dal prof. Lazzarino [2].

In quella Nota l'A. si è proposto di stabilire, senza fare alcuna ipotesi sulla natura delle correnti, le condizioni di esistenza di un noto teorema di reciprocità dovuto al prof. Volterra [3], riferendosi al caso di un conduttore in generale non omogeneo ed anisotropo, ma a temperatura costante, posto in un campo magnetico qualsiasi; ciò principalmente allo scopo di dimostrare che la verifica sperimentale del teorema di reciprocità non può considerarsi verifica della teoria di Drude.

Oltre l'ipotesi che, anche quando il campo magnetico non è nullo, si possa passare dal vettore Grad. V al vettore $\boldsymbol{j}$ per mezzo di un'omografia, l'A. introduce una seconda ipotesi la quale si traduce analiticamente nell'uguaglianza $(\alpha_1 - \gamma) = -(\alpha_2 - \gamma)$ (se con γ α_1 α_2 si denotano le omografie per mezzo delle quali con il campo nullo, con il campo diretto e con il campo invertito si passa da Grad. V a $\boldsymbol{j}$).

Questa seconda ipotesi, per quanto già ho detto, mi sembra in contraddizione con i risultati delle esperienze relative al caso di un conduttore omogeneo ed isotropo posto in un campo uniforme (caso particolare che pure deve essere compreso in quello generale dall'A. preso in esame). Del resto, la prima ipotesi basta per lo scopo dall'A. propostosi.

Ricordo che, riferendomi alla teoria di Drude, stabilii per la propagazione di correnti stazionarie in un conduttore non omogeneo ed anisotropo (a temperatura costante), posto in un campo magnetico qualsiasi, equazioni del tipo

$$(2)\quad \begin{cases} j_x = k_{11}\dfrac{\partial V}{\partial x} + k_{12}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k_{13}\dfrac{\partial V}{\partial z} \\ j_y = k_{21}\dfrac{\partial V}{\partial x} + k_{22}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k_{23}\dfrac{\partial V}{\partial z} \\ j_z = k_{31}\dfrac{\partial V}{\partial x} + k_{32}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k_{33}\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \qquad (2)'\quad \begin{cases} j_x = k'_{11}\dfrac{\partial V}{\partial x} + k'_{12}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k'_{13}\dfrac{\partial V}{\partial z} \\ j_y = k'_{21}\dfrac{\partial V}{\partial x} + k'_{22}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k'_{23}\dfrac{\partial V}{\partial z} \\ j_z = k'_{31}\dfrac{\partial V}{\partial x} + k'_{32}\dfrac{\partial V}{\partial y} + k'_{33}\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

(con il campo diretto) (con il campo invertito).

(1) La coincidenza di δ con γ implicherebbe le due uguaglianze $K = \sigma_0$, $\sigma = \sigma_0$; la prima di queste è in contraddizione non solo con le esperienze citate del prof. Trabacchi, ma anche con il risultato sperimentale (pure dovuto al prof. Trabacchi) che l'apparente conducibilità specifica, $\dfrac{K^2 + \varepsilon^2}{K}$, di una lamina disposta trasversalmente nel campo e munita di elettrodi puntiformi al contorno, è minore di σ_0.

(2) «Rend. Acc. dei Lincei», 2° sem., 1925, p. 103.

(3) «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem., 1915, pp. 220, 289, 378, 533.

Come condizioni sufficienti per la validità, in questo caso generale, del teorema di reciprocità del prof. Volterra, stabilii delle condizioni del tipo

(3) $\qquad k_{rr} = k'_{rr} \qquad k_{rs} = k'_{sr}$ [1];

sulla dimostrazione, del resto immediata (cfr. le formule (9) (10) (11) (12) della Nota citata), non ha alcuna influenza la particolare forma che, riferendosi alla teoria di Drude, hanno i coefficienti $k_{rs}\, k'_{rs}$; il risultato resta perciò valido anche se, prescindendo dalla teoria elettronica di Drude, si ammette come ipotesi che le componenti dei vettori Grad. V e $\boldsymbol{j}$ debbano essere legate da relazioni del tipo (2) (2)′.

Si può osservare che le (3) equivalgono alla condizione che le due omografie $\alpha_1\, \alpha_2$ per mezzo delle quali col campo diretto e col campo invertito si passa da Grad. V a $\boldsymbol{j}$ siano tra loro coniugate [2].

Anche se si prescinde da ogni ipotesi elettronica, si deve ammettere che nelle (2) (2)′ i coefficienti $k\, k'$ dipendano, oltre che dalla natura del metallo, dalla distribuzione del campo, in modo che all'annullarsi di questo $k_{rr}\, k'_{rr}$ acquistino uguali valori k^0_{rr}, e $k_{rs}\, k'_{rs}$ uguali valori k^0_{rs}. Dunque le (3), poichè si riferiscono a qualunque campo, includono le condizioni

(3)′ $\qquad k^0_{rs} = k^0_{sr}$ (cfr. le formule (15)′ della mia Nota citata)

le quali equivalgono alla condizione che l'omografia γ, per mezzo della quale senza campo si passa da Grad. V a $\boldsymbol{j}$, sia una dilatazione.

Se non si fa alcuna ipotesi sulla natura delle correnti, ma si ammette che le componenti di $\boldsymbol{j}$ debbano essere in ogni punto del conduttore funzioni lineari omogenee delle derivate di V, con coefficienti dipendenti soltanto dalla natura del metallo e dalle componenti del campo nel punto considerato, resta valida l'osservazione che già feci riferendomi alla teoria di Drude e cioè che per un conduttore (omogeneo o non omogeneo), isotropo fuori del campo, le (3) sono certamente verificate per qualsiasi campo. (Basta, per persuadersene, osservare che se in ogni punto P del conduttore si riferiscono $\boldsymbol{j}$ e Grad. V a tre assi ortogonali uscenti da P, dei quali due tangenti alla superficie di livello del campo che passa per P, si dovranno ottenere tra le componenti dei due vettori, con il campo diretto e con il campo invertito, delle equazioni del tipo (1) (1)′).

Dopo quanto ho detto, è superfluo ch'io affermi che sono perfettamente d'accordo con il prof. Lazzarino nel ritenere che le verifiche speri-

(1) «Rend. Acc. dei Lincei», 2° sem., 1916, p. 32, formule (8) e (13).

(2) La Nota del prof. Lazzarino (prescindendo da ciò che in essa dipende dalla seconda delle ipotesi di cui già ho parlato) stabilisce come condizione necessaria e sufficiente per la validità del teorema di reciprocità, proprio la condizione che α_1 e α_2 siano coniugate.

mentali del teorema di reciprocità non possono considerarsi come verifiche della teoria elettronica di Drude. Osserverò piuttosto che un'analoga asserzione si può fare per le verifiche sperimentali di tutti i risultati che per i conduttori omogenei ed isotropi posti in un campo uniforme possono dedursi dalle equazioni (1) (1)′ senza tener conto del modo nel quale $K\varepsilon\sigma$ dipendono dalle proprietà del metallo e dall'intensità h del campo. (Di tale specie sono gl'interessanti risultati che per una lamina disposta trasversalmente nel campo sono stati dedotti dal prof. Corbino e dal prof. Volterra).

Tali risultati, come le (1) (1)′, sono conciliabili tanto con la teoria elettronica di Drude quanto con quella di Lorentz e possono anche essere stabiliti, sostituendo le ipotesi particolari a ciascuna di queste teorie con l'unica ipotesi che $j_x\ j_y\ j_z$ debbano, anche sotto l'azione del campo magnetico, essere funzioni lineari omogenee delle derivate di V.

Fisica. — *Sull'effetto fotoelettrico composto.* Nota di A. Carrelli, presentata dal Socio M. Cantone [1].

In un recente lavoro l'Auger [2] ha sperimentalmente provato col metodo di condensazione di C. T. R. Wilson, che quando un sottile fascio di raggi X attraversa una massa gassosa si osserva che nello stesso punto della massa si ha produzione di un raggio β secondario, dotato di notevole velocità e dovuto all'effetto fotoelettrico noto ed emissione in numero variabile di altri fotoelettroni dotati di velocità molto inferiore; da queste esperienze parrebbe quindi sperimentalmente accertato che da uno stesso atomo possono essere emessi più corpuscoli negativi, e ciò per azione di un unico quanto di luce assorbito. Questo interessante fenomeno è stato denominato dallo scopritore *effetto fotoelettrico composto*, e l'interpretazione teorica di esso, proposta dallo stesso, risiede sulla supposizione che il primo elettrone emesso dall'azione del quanto incidente parte da uno dei cerchi elettronici che costituiscono l'atomo (K, L, M ecc.), lasciando questo in uno stato di eccitazione, dipendentemente dall'assorbimento della quantità d'energia che corrisponde al lavoro necessario per portare l'elettrone alla periferia dell'atomo dal cerchio sul quale originariamente si trovava. Questa energia in luogo di trasformarsi in radiazione dando origine ad una riga o ad un complesso di righe delle serie di alta frequenza, può essere invece utilizzata per l'emissione di un nuovo elettrone proveniente da un altro livello e così via.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Napoli.
(2) Auger, « Jour. de Phys. », S. VI, Tom. VI, p. 205 (1925).

In questa Nota vengono analizzate le modalità di tale processo, allo scopo di porlo in relazione con altre manifestazioni ben note dall'esperienze relative alle trasformazioni energetiche nel campo delle grandi frequenze.

1. Se tale effetto fotoelettrico composto per ciò che riguarda l'effettiva contemporaneità dell'emissione dei diversi elettroni per azione di un *unico* quanto assorbito, è realmente confermato ancora da altre esperienze e se si rimane nell'ordine d'idee dell'Auger esso fornisce un'altra interessante prova dell'equivalenza fra l'emissione di un elettrone e di un quanto di luce, tanto più interessante in quanto che tale processo di sostituzione di una forma d'energia ($E = h\nu$) in un'altra $\left(E = \frac{1}{2} m v^2\right)$ avviene nell'interno dell'atomo stesso.

Volendo stabilire analogie fra questo fenomeno ed altri noti, sempre rimanendo nello stesso ordine d'idee, è da porre in rilievo che la caratteristica del processo di emissione dei raggi X, caratteristica che li distingue dall'emissione delle serie dello spettro visibile, è, secondo l'interpretazione di Kossel, la contemporanea comparsa delle righe della stessa serie, quando la causa eccitatrice raggi X o raggi catodici possiede un'energia E tale che sia maggiore di quella corrispondente al lavoro necessario per estrarre un elettrone dal cerchio elettronico caratteristico della serie K, L, M ecc., che si considera. Tale fenomeno dipende dal fatto che essendo gli anelli elettronici interni tutti completamente occupati, lo spostamento di un elettrone non può avvenire che come allontanamento del corpuscolo dall'atomo, e quindi si genera nell'atomo uno stato instabile per cui conseguentemente ne può derivare l'emissione di una qualunque delle righe della serie corrispondente al cerchio dal quale è partito l'elettrone, a seconda della provenienza dell'elettrone che occuperà il posto lasciato vuoto. Eccitata quindi la serie, può aversi una qualunque delle righe di essa, e quindi queste sono emesse contemporaneamente.

Tale processo è però dovuto ad atomi diversi mentre la contemporanea emissione di più fotoelettroni deriva dallo stesso atomo; essa ha quindi un altro significato. S'immagini infatti un quanto di luce incidente che incontrando un atomo nel suo percorso sia da questi assorbito; l'energia elettromagnetica connessa con il quanto viene utilizzata per espellere un elettrone da uno dei cerchi interni con una certa velocità, e conseguentemente l'atomo si trova in uno stato ionizzato mentre l'elettrone viene allontanato da esso.

Gli elettroni degli strati esterni a quello in cui è avvenuta l'espulsione possono colmare il vuoto anzidetto mettendo in libertà una certa quantità d'energia, e il fenomeno in esame può considerarsi come provante che questa può portarsi su di un altro elettrone appartenente ad un altro livello. Come anche pone l'Auger la relazione che passa fra il quanto incidente $h\nu$, la frequenza limite ν_k della serie K, la forza viva dell'elettrone espulso, se si

suppone che il primo fotoelettrone provenga dal cerchio K, è la seguente

$$h\nu = h\nu_k + \frac{1}{2} m v^2 .$$

Ora indicando con k, l, m, n, ecc., il numero di elettroni che normalmente appartengono ai vari livelli K, L, M, N, ecc., ne consegue che lo stato dell'atomo prima e dopo l'azione del quanto incidente può dirsi caratterizzato dallo schema seguente

k	l	m	n
$k-1$	l	m	n

Ma poichè il posto lasciato libero non può così rimanere, vi sarà passaggio di un elettrone da uno qualunque degli altri anelli sul cerchio K e tale passaggio può avvenire in N — 1 modi diversi, a seconda del cerchio dal quale l'elettrone proviene, se s'indica con N il numero dei vari livelli, e si trascura la molteplicità di essi. L'atomo quindi passa in un nuovo stato che non possiamo considerare come finale di un determinato processo di emissione, poichè l'energia liberata in tal modo invece di comparire come energia elettromagnetica e quindi dar luogo ad emissione di una radiazione, si porta su di un altro elettrone dello stesso atomo dando origine alla produzione di un altro raggio corpuscolare. Possiamo quindi descrivere il processo in due stadi, a cui corrispondono diversi schemi.

1° stadio	2° stadio
$k \quad l-1 \quad m \quad n \ldots$	$k \quad l-2 \quad m \quad n \ldots$
	$k \quad l-1 \quad m-1 \quad n \ldots$
	.....
$k \quad l \quad m-1 \quad n \ldots$	$k \quad l \quad m-2 \quad n \ldots$
	$k \quad l \quad m-1 \quad n-1 \ldots$
	.....
$k \quad l \quad m \quad n-1 \ldots$	$k \quad l \quad m \quad n-2 \ldots$
.....	.....

Esso può quindi avvenire in diverse maniere a seconda degli elettroni che intervengono.

Gli schemi indicati provengono da quello precedente in cui è immaginato che nel cerchio K manchi uno dei due elettroni che lo formano. Nel

primo di essi un elettrone del cerchio L ha occupato il posto lasciato libero, quindi l'energia messa in giuoco è data da $h(\nu_K - \nu_L)$ e cioè

$$E = \frac{R(N - s_K)^2}{1^2} - \frac{R(N - s_L)^2}{2^2}$$

quest'energia in valore assoluto è maggiore di quella che corrisponde ad $h\nu_L$ data da $\frac{R(N - s_L)^2}{2^2}$ perchè s_L è maggiore di s_K e conseguentemente a tutti gli altri livelli, M, N, ecc., quindi il secondo elettrone può essere emesso da uno qualunque degli altri archi esterni a quello prima considerato.

In tal modo l'atomo ha perduto due elettroni, ed essendo ancora in uno stato eccitato può completare ulteriormente il processo di assetto, o con l'emissione di energia raggiante, o ancora con l'emissione di altri elettroni. Chiaramente si ricava dal cenno fatto che questo fenomeno può avere una grande complessità, analogamente a quanto avviene nel processo di emissione di energia raggiante.

Da quanto precede facilmente si vede a quali altre manifestazioni si collega l'espulsione di due o più elettroni dallo stesso atomo, e precisamente si vede che come l'espulsione di un elettrone da un anello è la causa della emissione di una riga spettrale o di diverse, le quali righe appartengono allo schema fondamentale ben noto dei livelli atomici, l'espulsione di un altro elettrone pone l'atomo in uno stato di eccitazione che non corrisponde a nessuno di quelli da cui dipende l'emissione di righe corrispondenti allo schema suddetto. Tale stato d'eccitazione darà invece origine ad altre righe le quali sono caratterizzate da uno stato di duplice, triplice, ecc., ionizzazione interiore dell'atomo. Ora queste sono state sperimentalmente trovate e si palesano come satelliti delle righe principali e sono state interpretate teoricamente nel modo suddetto da Wentzel [1], e denominate per analogia a quanto avviene nello spettro visibile, spettri di scintilla, od anche spettri di seconda, terza, ecc., specie. L'effetto fotoelettrico composto è quindi in relazione con l'emissione di tali linee come l'effetto fotoelettrico semplice prodotto dai raggi X o dall'urto dei corpuscoli catodici nelle varie sostanze con l'emissione delle righe delle serie K, L, M, N, ecc.

Viene in tal modo a ritrovarsi ed a confermarsi quella particolarità dell'esistenza di righe di spettri d'ordine superiore in un altro fenomeno.

La bontà del metodo di Wilson si manifesta appunto perchè con l'uso di sostanze gassose si è potuto stabilire dall'Auger che il processo di ionizzazione multipla deriva da un unico quanto assorbito. Si può quindi dire che si ha ancora un altro elemento per decidere un problema posto da

(1) WENTZEL, «Ann. d. Phys.», *66*, 437 (1921). - SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, p. 319, 4 Auf.

Wentzel, se cioè l'allontanamento di due o più elettroni, condizione questa essenziale per la produzione di righe di scintilla, sia dovuto ad un processo avente luogo per gradi o dipendente da un unico atto. Mentre Wentzel ritiene probabile la prima ipotesi, fondandosi sulla struttura complessa delle testate di assorbimento, Coster [1] ha criticato tale interpretazione ed ha cercato di dimostrare sperimentalmente con esperienze condotte sulla serie L, che l'assorbimento e la conseguente ionizzazione multipla sono un unico processo, ed ancora l'esperienze di Millikan [2], di Bäcklin [3], di Björkeson [4] e le considerazioni teoriche di Rossland [5] confermano tale ipotesi. I risultati di Auger ci mettono in grado di concludere che in alcuni casi anche quando la causa ionizzante non è un elettrone ma un quanto di luce, tale interpretazione corrisponde alla realtà, e ciò mediante esperienze che lo dimostrano in modo diretto.

2. Quanto finora è stato detto riguarda esclusivamente ciò che può trarsi partendo dall'interpretazione di Auger, che cioè un quanto di luce agisca in realtà su di un unico elettrone, gli altri infatti sarebbero espulsi da quanti generati nell'atomo stesso nel processo di assetto.

Ma questa interpretazione, qui sviluppata in alcune parti, pur considerando l'effetto fotoelettrico composto come una ionizzazione multipla e quindi come una causa della produzione di righe di scintilla nell'emissione di raggi X, porta alla conclusione che quando questi sono generati per fluorescenza da altri di maggiore frequenza, non tutti i vari tipi di ionizzazione multipla possono essere dovuti all'assorbimento in un unico quanto.

Infatti da ciò che è stato detto chiaramente risulta che il primo livello che può essere doppiamente ionizzato mediante un unico quanto, può essere soltanto il livello L, quindi le linee α_4 e α_6 che si considerano come dovute alle trasformazioni

$$\begin{matrix} k-2 & l \\ \downarrow & \\ k-1 & l-1 \end{matrix} \qquad \alpha_4 \qquad\qquad \begin{matrix} k-2 & l-1 \\ \downarrow & \\ k-1 & l-1 \end{matrix} \qquad \alpha_6$$

non possono comparire nell'emissione per fluorescenza qualunque sia la frequenza della radiazione eccitatrice, mentre si è mostrato che esse sono generate dopo che l'atomo ha subìto un unico urto elettronico il quale ha agito come doppiamente ionizzante.

(1) Coster, «Phil. Mag.», *44*, 546 (1922).
(2) Millikan, «Phys. Rev.», *18*, 456 (1921).
(3) Bäcklin, «Zeit für Phys.», *27*, 30 (1924).
(4) Björkeson, «Proc. of the Nat. Ac. Am.», Vol. II, p. 413 (1925).
(5) Rossland, «Phil. Mag», *45*, 65 (1923).

Per decidere quindi se l'azione doppiamente ionizzante di un quanto di luce si attua mediante un processo come quello qui svolto, sono necessarie esperienze sulla serie K e satelliti come quelle condotte da Coster sulla serie L, ma usando come causa eccitatrice in luogo dei raggi catodici di diversa velocità radiazioni X di diversa frequenza, e la mancanza nell'irraggiamento per fluorescenza di tali linee dimostrerebbe appunto che un quanto di luce agisce in realtà su di un unico elettrone e l'espulsione degli altri dipende da altri quanti di luce generati nell'atomo stesso.

Matematica. — *Sul principio della media aritmetica.* Nota di GIULIO BEMPORAD, presentata dal Socio Corrisp. A. BEMPORAD.

Alcuni anni or sono pubblicai una Nota (1) contenente una nuova dimostrazione del principio della media aritmetica, assumendo un certo numero di postulati, dimostrando in base a questi valido il principio quando le misure siano due soltanto, e infine dimostrando valido il principio per n misure quando sia ammesso per $n - 1$. Quest'ultima parte si appoggia su di una interpretazione del I postulato assunto, che forse non è – in quella nota – sufficientemente chiarita. Perciò essa dette occasione al compianto prof. Zappa di farmene qualche cortese appunto, in forma privata. Lo Zappa riteneva che l'interpretazione su accennata fosse arbitraria, o contenesse implicitamente un postulato in più, che a lui sembrava non abbastanza evidente da poter essere accettato. E concludeva esortandomi a riprendere in esame la dimostrazione, per vedere se fosse possibile di eliminarne l'ultima parte, generalizzando invece la prima relativa al caso di due misure. Soltanto oggi sono in grado di comunicare un risultato esauriente delle riflessioni fatte in quest'ordine d'idee. Colgo l'occasione per ripetere anche, in riassunto, la dimostrazione già pubblicata, in una redazione alquanto diversa, in modo da eliminarne qualche inesattezza prima sfuggita.

Siano $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ n misure *indipendenti* di una stessa quantità x. Assumeremo i postulati seguenti:

I. – Qualunque sia il numero delle misure eseguite, esiste un numero che è da assumersi come risultato complessivo di tutte le misure. Il risultato complessivo di un numero qualunque di misure è quantità in tutto paragonabile al risultato singolo di una sola osservazione, e deve quindi essere considerato alla stessa stregua. Esso è dato da una funzione delle $x_1, x_2, \cdots, x_n$, finita e continua insieme con le sue derivate parziali prime.

II. – Il risultato delle n misure è indipendente dall'unità di misura adottata.

(1) « Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani », 1919.

III. – Esso è indipendente anche dall'origine da cui sono contate le quantità osservate.

IV. – Se i risultati delle singole misure presentano ugual grado di attendibilità, il risultato complessivo deve essere funzione simmetrica di essi.

Dimostriamo da prima il principio senza alcuna ipotesi sull'uguale o diversa attendibilità delle misure, e quindi prescindendo dal IV postulato.

Se $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ è la funzione accennata nel I postulato, essa dovrà per il II e per il III soddisfare alle seguenti proprietà:

$$f(h\,x_1, h\,x_2, \cdots, h\,x_n) = h f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$f(h + x_1, h + x_2, \cdots, h + x_n) = h + f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

qualunque sia h. Queste equivalgono alle seguenti

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = f$$

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 1\,.$$

Nel caso di $n = 2$, il sistema (1) ha l'integrale generale

$$f = \frac{a\,x_1 + b\,x_2}{a + b}\,, \tag{2}$$

come subito si vede.

Ammettiamo ora che se le misure sono $n - 1$ la funzione f debba essere:

$$f = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}\,. \tag{3}$$

Se le misure sono n, le prime $n - 1$ di esse dovranno, per il postulato I, dar luogo a un risultato unico complessivo delle $n - 1$ misure, che sarà dato da (3). Il risultato complessivo delle n misure sarà perciò anche il risultato delle due misure $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ e x_n, il quale, per la (2) sarà

$$\frac{a\,f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) + b\,x_n}{a + b} =$$

$$= \frac{a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + \dfrac{b}{a}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + \dfrac{b}{a}(a_1 + \cdots + a_{n-1})}\,,$$

o, posto

$$a_n = \frac{b}{a}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),$$

$$(4) \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

La (4) rappresenta, come si sa, la *media pesata* delle $x_1, \cdots, x_n$.

Se, ora, le $x_1, \cdots, x_n$ hanno lo stesso grado di attendibilità, essa deve essere funzione simmetrica, ciò che non può aversi se non siano uguali tutti i coefficienti a, nel qual caso si ha dunque che il risultato complessivo è la *media aritmetica semplice* delle n misure.

Può ora chiedersi se non ci sia qualche cosa di arbitrario, che non possa essere facilmente accettato, nel passaggio di cui si è fatto uso

$$(5) \qquad f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = f[f(x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n].$$

Questo, secondo le obiezioni dello Zappa, era il punto debole della presente dimostrazione.

Il sistema di equazioni (1), che nel caso di due sole variabili indipendenti ha l'integrale generale

$$\frac{a x_1 + b x_2}{a + b},$$

nel caso generale di n variabili ha l'integrale generale che si può mettere nella forma

$$(6) \qquad f = \mathrm{M} + (x_n - x_{n-1})\,\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_{n-2})$$

dove:

$$\mathrm{M} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$u_1 = \frac{x_n - x_1}{x_n - x_{n-1}}, \qquad u_2 = \frac{x_n - x_2}{x_n - x_{n-1}}, \cdots, u_{n-2} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}$$

e φ è una funzione del tutto arbitraria.

È evidente quindi che i soli postulati da I a III non sono sufficienti a condurre al principio della media aritmetica, se il I viene interpretato unicamente come un *principio di esistenza* della funzione f. Limitandosi al caso di misure ugualmente attendibili, e facendo quindi uso anche del postulato IV,

la (6) deve esser simmetrica rispetto alle x. Sia, per esempio, il caso $n = 3$. La (6) si può porre nella forma

$$f = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + u\,\varphi\left(\frac{u}{v}\right), \tag{7}$$

dove $u = \dfrac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2}$, $v = \dfrac{x_2 - x_3}{x_3 - x_1}$, e φ è una funzione arbitraria di una variabile.

Una forma particolare della funzione φ, la quale dà luogo anche a una funzione simmetrica delle x è, per esempio la seguente:

$$\varphi = \frac{1}{\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3}} + \frac{1}{\frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_1}} + \frac{1}{\frac{1}{x_3 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2}}$$

La funzione così definita

$$f = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \varphi \tag{8}$$

soddisfa tutti i postulati assunti, e non si riduce alla media aritmetica che per $x_1 = x_2 = x_3$. È notevole che essa soddisfa anche alla condizione

$$f(x, x, \cdots, x) = x, \tag{9}$$

condizione non necessaria da aggiungere come postulato a sè per arrivare al principio della media aritmetica, ma a cui la funzione f deve necessariamente soddisfare, essendo ben plausibile che, allorquando le n misure concordano in un unico valore, questo debba essere assunto come risultato del complesso di misure eseguite.

Riepilogando, abbiamo dunque:

Se al I postulato noi attribuiamo solo il significato e il valore di un *principio d'esistenza* della funzione f, esso, coi postulati successivi, anche aggiungendovi quello espresso dalla (9), non è sufficiente a condurre al principio della media aritmetica, conducendo invece a un principio più generale, contenente una funzione arbitraria di $n - 2$ variabili. Per condurre al principio della media aritmetica, esso deve: o essere completato con l'aggiunta di altri postulati, o essere interpretato nel senso della (5). La quale ci sembra non arbitraria, e anzi perfettamente conforme al concetto che si ha di misure e di medie. Ciò non toglie, naturalmente, che essa debba essere esplicitamente enunciata come postulato.

Un'ultima osservazione ci sembra ancora opportuna.

I coefficienti $a_1, a_2, \cdots$ che compaiono nella (3) e nella (4) sono evidentemente nient'altro che i pesi delle singole misure. Deducendo, come abbiamo fatto, la (4) dalla (3) in base al principio espresso da (5), gli *stessi valori* delle a che compaiono in (3) si trovano a comparire in (4), ciò che è conforme al concetto di peso.

Dal principio (5) risulta perciò anche il modo corretto di intendere il peso di una misura.

Chimica. — *L'azione catalitica dei metalli del gruppo del platino e il loro grado di suddivisione* [1]. Nota I di G. R. Levi e R. Haardt presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Su questo argomento uno di noi (G. R. Levi) comunicava alla Società di Chimica Industriale di Milano il giorno 8 luglio 1925 alcune notizie sommarie. Esse venivano così brevemente riassunte [3]:

« È ben noto che certi metalli, specialmente dell'8° gruppo, hanno un'azione catalitica particolarmente energica quando sono finamente divisi. Mentre pei prodotti colloidali è stato possibile stabilire le dimensioni dei granuli con buona approssimazione a mezzo dell'ultramicroscopio, nulla è noto sulle dimensioni dei granuli dei prodotti precipitati. Scherrer ha trovato pei colloidi di oro e di argento a mezzo dell'esame coi raggi X, delle dimensioni in accordo con quelle dedotte con l'ultramicroscopio. Pei metalli precipitati ha trovato invece delle dimensioni così notevoli da non potere distinguerli dalle polveri ottenute meccanicamente, almeno con questo mezzo di diagnosi.

« Esperienze ripetute dall'autore sui precipitati di oro e di argento concordano con i risultati di Scherrer; conclusioni completamente diverse si traggono invece dall'esame dei metalli precipitati del gruppo del platino; per questi si sono dedotte delle dimensioni dei granuli così piccole da potersi confrontare con quelle dei colloidi di oro e argento fortemente dispersi.

« Precisamente pel Pt, Pd, Ru precipitati si hanno delle dimensioni dei granuli di circa 10 μμ; questo valore medio si applica bene pel Ru, è un po' maggiore pel Pd e un po' minore per il Pt (si tratta di metalli ottenuti dai rispettivi cloruri con formaldeide ed alcali, o formiato sodico, o idrato di idrazina).

« Pel nero di Rh, ottenuto in modo analogo, le dimensioni sono assai più piccole, circa 2 μμ; e la grande suddivisione dei granuli spiega bene l'azione catalitica particolarmente intensa di questo prodotto. Dopo aver decomposto una forte quantità di acqua ossigenata, il nero di rodio non dimostrò un apprezzabile ingrossamento dei granuli. Tali valori di dimensioni dei granuli sono da considerarsi approssimativi, non avendo ancora potuto fotometrare le film per mancanza di adatti dispositivi.

« Si fa osservare come questo mezzo possa essere di guida alla preparazione e all'esame di questi catalizzatori così importanti in pratica e per i quali non si aveva finora un mezzo preciso per stabilire le dimensioni dei granuli ».

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del Politecnico di Milano.
(2) Presentato nella seduta del 3 gennaio 1926.
(3) « Gior. Chim. Ind. e App. », 7, p. 410 (1925).

Nel settembre successivo fu possibile di fare uno studio accurato della questione avendo avuto la possibilità di acquistare un microfotometro della casa Kipp e Zonen di Delft. Fu aumentata la sensibilità di questo apparecchio modificando il dispositivo di illuminazione e la pila termoelettrica; l'apparecchio verrà dettagliatamente illustrato altrove.

Lo studio fu ripreso dall'inizio utilizzando i preparati già ottenuti e facendone anche di nuovi. Tutti i preparati furono però nuovamente fotografati, poichè i fotogrammi a cui si riferisce la comunicazione preliminare erano stati ottenuti per ragioni di comodità e rapidità con anticatodi di rame o di ferro ma con tubi ad elettroni « Media Müller » provvisti di finestra di Lindemann.

Come dimostreremo in un altro lavoro sui metalli compatti del gruppo del platino, tali tubi danno, dopo un certo uso, delle linee parassite dovute al tungsteno del filamento catodico e perciò debbono considerarsi adatti solo per ricerche qualitative. Di più le film ottenute con essi sono notevolmente annerite per la radiazione diffusa e ciò diminuisce assai l'esattezza delle misure microfotometriche. Perciò tutti i preparati allora ottenuti furono rifotografati con tubo di Hadding e anticatodo di rame; esperienze con anticatodo di ferro non diedero risultati sensibilmente più vantaggiosi. Le esperienze coi metalli compatti servono a stabilire con esattezza la posizione delle linee osservate.

Trattandosi di elementi a struttura molto semplice e con linee forti ad intervalli generalmente abbastanza grandi è possibile nella grande maggioranza dei casi, di stabilire abbastanza bene la larghezza delle linee; i fotogrammi con tubo Hadding e anticatodo di rame risultano assai chiari e particolarmente adatti per l'esame col microfotometro.

È interessante osservare che tutti i mezzi messi finora a nostra disposizione non permettevano di trattare questo problema, ed appare perciò evidente la peculiare utilità dell'esame roentgenografico in questo caso.

Il metodo seguito in queste ricerche non è che l'estensione fatta da uno di noi ai precipitati in questione, di quello già applicato ai colloidi [1].

Per i metalli colloidali era stato dimostrato che l'aumento della larghezza delle linee in funzione dell'angolo è proporzionale al grado di suddivisione e precisamente indicando con B la metà della larghezza della linea osservata, con λ la lunghezza della radiazione X impiegata, con θ l'angolo corrispondente al massimo della linea si ha:

$$B = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Delta} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} + b$$

(1) G. R. Levi, loc. cit. e Scherrer in « Kolloidchemie di Zsigmondy », IV ed., p. 393.

dove Λ è appunto la lunghezza del lato della particella supposta cubica e b una grandezza dipendente dal diametro del preparato. Questa espressione vale pel sistema monometrico, però se, come nel caso dell'osmio e del rutenio, si tratta di corpi cristallizzati in sistemi diversi si può da Λ^3, e cioè dal volume, risalire ai valori dei lati della particella, qualora si supponga un regolare accrescimento in tutte le direzioni.

Per ricavare un valore medio dai diversi valori di B misurati è utile la rappresentazione grafica proposta da Scherrer. Nella fig. 1 del testo sono riportate sulle ascisse i valori di $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ e sulle ordinate B in mm.

Nel nostro dispositivo di registrazione delle intensità osservate il rapporto era di 1 mm. della film a 2,72 mm. del diagramma di registrazione.

Le curve così registrate sono riportate nella tavola allegata fig. 6 a 10 e sono di dimensioni circa $^1/_2$ dell'originale. Le film (fig. 1 a 5 della tavola) sono invece, entro i limiti degli errori di riproduzione, di dimensioni uguali agli originali: il centro della film si intende sempre a sinistra.

Nella fig. 1 del testo i valori delle rette tracciate in funzione dei punti osservati, è tale che esse non passano per l'origine; si può cioè calcolare dall'altezza dell'ordinata per l'ascissa 0 il valore di b che è sempre assai inferiore al diametro del preparato e ciò dato il forte potere assorbente dei preparati in esame. Essendo la nostra camera di 57 mm. si ha:

$$B \text{ assoluto} = \frac{2}{57} B \text{ mm. e analog. per } b \text{ e per } 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

I valori delle costanti $\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda}$ e b vennero nei diversi casi calcolati col metodo dei minimi quadrati e sostituiti nella formula di cui sopra per ricavare Λ.

Platino.

Abbiamo esaminato col metodo sopra descritto 5 diversi preparati e precisamente 3 neri, 1 del commercio e 2 preparati da noi e 2 spugne ottenute col classico procedimento di riscaldamento del cloroplatinato ammonico.

1) *Nero di platino Heraeus.* — Il fotogramma relativo a questo preparato è rappresentato nella fig. 1 della tavola allegata e la registrazione al microfotometro nella fig. 6 della stessa tavola.

Nella tabella qui sotto riportata la prima colonna dà l'indice della faccia, la seconda il semivalore di θ; la terza $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$; la quarta B in mm.

ossia la semilarghezza effettiva della linea corretta tenendo conto del rapporto sopraindicato fra film e cilindro registratore.

Ugualmente daremo i valori per gli altri preparati:

$h_1\ h_2\ h_3$	$\theta/2$	$1/\cos\theta/2$	B in mm.
111	20,00	1,064	1,011
200	23,26	1,089	1,066
220	33,96	1,206	1,103
311	40,96	1,324	1,160
331	59,28	1,955	1,525
420	62,00	2,127	1,615

Da questa tabella si calcolano col metodo dei minimi quadrati i valori delle costanti $2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda}$ e b che sono rispettivamente:

$$(1)\quad 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{2}{57} \cdot 0{,}5952 \quad ; \quad (2)\quad b = \frac{2}{57} \cdot 0{,}3700.$$

La retta relativa è rappresentata graficamente in 1) nella fig. 1 del testo. Dalla (1) si ricava $\Lambda = 69{,}3\ \text{Å} = 6{,}93\ \mu\mu$; e cioè il lato di un granello

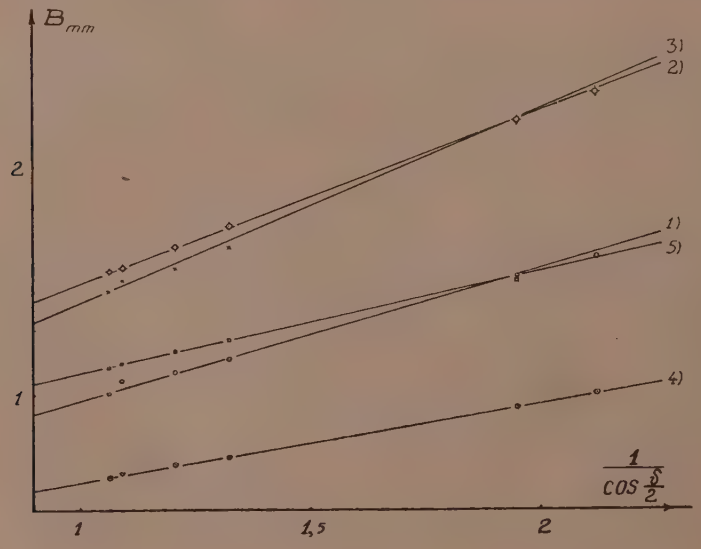

Fig. 1.

corrisponde a circa 18 volte il valore del lato della cella elementare. Se si confronta questo valore con quelli dati pei colloidi di oro e di argento del commercio, si vede che esso è dello stesso ordine.

Per un preparato « oro colloidale della casa Heyden » Scherrer trovò per es. 86,2 Å e il valore dedotto dalle misure ultramicroscopiche era di 100 Å circa.

2) *Nero di platino precipitato da soluzioni acide a caldo per azione dell'alluminio sull'* H_2PtCl_6. — Questo prodotto fu da noi ottenuto acidificando con HCl conc. nella proporzione del 10 % una soluzione al 5 % di H_2PtCl_6, scaldando a 60-70° e aggiungendo alluminio puro in granelli. Dopo lavaggio il prodotto veniva asciugato a 100°. Il fotogramma relativo a questo prodotto è rappresentato nella fig. 2 della tavola allegata e la registrazione al microfotometro nella fig. 7 della stessa tavola. I valori osservati sono:

$h_1\ h_2\ h_3$	$\theta/2$	$1/\cos\theta/2$	B in mm.
111	20,00	1,064	1,541
200	23,26	1,089	1,562
220	33,96	1,206	1,655
311	40,96	1,324	1,745
331	59,28	1,955	2,207
420	62,00	2,127	2,334

Col metodo dei minimi quadrati si ottiene:

$$(1) \qquad 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{2}{57} \cdot 0{,}780 \quad ; \quad b = \frac{2}{57} \cdot 0{,}693.$$

La rappresentazione grafica della retta è data in 2) nella fig. 1 del testo. Dalla (1) si ricava $\Lambda = 52{,}8$ Å $= 5{,}28$ μμ; il lato corrisponde quindi a circa 14 volte il valore della cella elementare ed è perciò sensibilmente più piccolo del preparato Heraeus.

3) *Nero di platino da soluzione neutra al 5 % di* H_2PtCl_6 *con alluminio in granelli a freddo.* — La fig. 3 della tavola allegata rappresenta il fotogramma di questo preparato; la registrazione microfotometrica è riprodotta nella fig. 8. I valori osservati sono:

$h_1\ h_2\ h_3$	$\theta/2$	$1/\cos\theta/2$	B in mm.
111	20,00	1,064	1,452
200	23,26	1,089	1,506
220	33,96	1,206	1,561
311	40,96	1,324	1,654

Da questi valori calcoliamo:

$$(1)\qquad 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda}{\Lambda}=\frac{2}{57}\cdot 0{,}8580\ ;\quad (2)\quad b=\frac{2}{57}\cdot 0{,}5467.$$

La retta relativa è rappresentata in 3) nella fig. 1 del testo.

Dalla (1) si ricava: $\Lambda = 48{,}0$ Å $= 4{,}8$ μμ; il lato del granello corrisponde quindi a circa 12 volte il valore del lato della cella elementare ed è perciò confrontabile con quello di un preparato colloidale *a fortissimo grado di dispersione*. Per un preparato d'oro colloidale di Zsigmondy che non dava quasi apprezzabile cono di Tyndall, Scherrer trovò $\Lambda = 18{,}6$ Å di confronto a 16 Å previsti dalle misure di pressione osmotica.

4) *Spugna di platino ottenuta da* $(NH_4)_2PtCl_6$ *a 320°.* — Per questa preparazione il cloroplatinato di ammonio fu scaldato a 320° in corrente di idrogeno, poi lavato con acqua a 60–70° per asportare le piccole quantità di NH_4Cl ancora eventualmente trattenute ed infine seccato nel vuoto a 100°. Nella fig. 4 della tavola allegata è riprodotto il relativo fotogramma e la registrazione microfotometrica nella fig. 9.

La tabella dei valori osservati è la seguente:

$h_1\ h_2\ h_3$	$\theta/2$	$1/\cos\theta/2$	B in mm.
111	20,00	1,064	0,643
200	23,26	1,089	0,662
220	33,96	1,206	0,699
311	40,96	1,324	0,735
331	59,28	1,955	0,956
420	62,00	2,127	1,011

$$(1)\qquad 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda}{\Lambda}=\frac{2}{57}\cdot 0{,}3658\ ;\quad (2)\quad b=\frac{2}{57}\cdot 0{,}246.$$

La rappresentazione grafica della retta si trova sotto 4) nella fig. 1 del testo. Dalla (1) si ricava $\Lambda = 112{,}7$ Å $= 11{,}27$; il lato del granello è quindi circa 29 volte quello della cella elementare e perciò notevolmente superiore a quello di tutti gli altri preparati esaminati.

5) *Spugna di platino ottenuta come la precedente ma per riscaldamento a 250°.* — Il lavaggio con acqua per asportare il cloruro ammonico ha naturalmente qui più importanza: il prodotto ha un aspetto nerastro mentre quello ottenuto a 320° ha un aspetto grigio acciaio. Nella fig. 5 della tavola allegata è rappresentato il fotogramma e nella fig. 10 la corrispondente registrazione al microfotometro. I valori osservati sono:

$h_1\ h_2\ h_3$	$\theta/2$	$1/\cos\theta/2$	B in mm.
111	20,00	1,064	1,121
200	23,26	1,089	1,140
220	33,96	1,206	1,195
311	40,96	1,324	1,250
331	59,28	1,955	1,507
420	62,00	2,127	1,617

Da questi valori si ottiene:

$$(1) \qquad 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{2}{57} \cdot 0{,}458 \quad ; \quad (2) \quad b = \frac{2}{57} \cdot 0{,}631.$$

Nella fig. 1 del testo la retta corrispondente è rappresentata in 5). Dalla (1) si ricava: $\Lambda = 90$ Å $= 9{,}0\ \mu\mu$; il lato della particella è perciò circa 23 volte quello della cella elementare.

Dal confronto delle dimensioni dei granuli dei cinque preparati di platino esaminati appare che si possono far variare entro limiti abbastanza vasti le dimensioni dei granuli del nero e della spugna di platino a seconda del metodo di preparazione usato; particolarmente si rilevi la finezza dei granuli del preparato ottenuto da soluzione di H_2PtCl_6 col Al a freddo che corrisponde a 5 volte soltanto il valore della cella elementare.

In una nota successiva verrà riferito sugli altri metalli del gruppo.

Anatomia comparata. — *Su la struttura del pettine e sul significato morfologico e funzionale di esso nell'occhio degli uccelli.* Nota di P. Pasquini, presentata dal Socio Corrisp. F. Raffaele.

Nei trattati anche recenti di anatomia dell'occhio degli uccelli, al pettine, per varie ragioni, è ancora riservata un'incerta sede fra i componenti del bulbo oculare. Non che manchino ricerche su questo argomento, chè anzi esse sono molteplici, ma sta di fatto che nè morfologicamente, nè funzionalmente si può attribuire al pettine un preciso valore. Ovio [1] pone il pettine, quale annesso della coroide, fra gli organi pigmentosi dell'occhio dei vertebrati, tali anche il corpo ciliare e l'iride, ma anch'egli lascia insoluto il problema così esprimendosi: « Sembra che si tratti di una produzione permanente formatasi col mesoderma e coi vasi che penetrano entro la vescicola ottica per la fessura fetale, ma nonostante gli studi numerosi non si sa ancora di preciso a che cosa serva ».

Ormai i dubbi che imperavano sulla genesi del pettine possono ritenersi sorpassati. I lavori di Bernd (1905), v. Husens (1913), Lindahl (1922), v. Szily (1922), Kajitawa (1923), Mann (1924) e recentemente alcune mie ricerche in proposito [2] hanno illustrato ampiamente il problema del suo sviluppo, che si può riassumere, secondo i miei asserti, in una fondamentale partecipazione del mesoderma emigrato nella cupola ottica attraverso i labbri della fenditura del calice ed in una secondaria cooperazione della parete della cupola.

Negli stadî avanzati di sviluppo, desta speciale attenzione il rapido stabilirsi in seno al pettine, di una ricca vascolarizzazione che del resto è accennata fin dall'inizio della sua formazione.

Il pettine, nell'adulto, si può considerare quasi esclusivamente formato da un fitto intreccio di vasi sanguiferi che, nella lamina pieghettata, si distribuiscono secondo complesse arborizzazioni di diverso calibro che ricordano lontanamente, per le loro molteplici anastomosi, quelle disposizioni vascolari proprie dei tessuti erettili, cavernosi e delle reti sinusoidi.

Come è noto negli uccelli la retina è di tipo anangico; il sangue giunge al pettine dall'arteria oftalmica che per una rete mirabile si continua nel vaso basale del pettine. Descrizioni recenti che trattano della sua intima costituzione si limitano a definirlo un organo eminentemente vascolarizzato

(1) *Anatomia e fisiologia dell'occhio nella serie animale.* F. Vallardi, Milano, 1925.

(2) Pubblicate in tre note in questi « Rendiconti », vol. I, ser. 6ª, I sem., fasc. 6, 7 vol. II, ser. 6ª, II sem., fasc. 1, 2; Idem in « Monitore Zoologico », anno XXXVI, Firenze 1925.

in quanto attraversato in tutti i sensi da una fitta rete di capillari che lo compongono, a quanto dice Mann [1]: « principalmente ». Mann nega la presenza di un *adventitia capillaris* e descrive la parete di ogni vaso come esclusivamente formata dall'endotelio circondato, a sua volta, da una sottile membrana rifrangente che intende come una vera *parete propria* del capillare.

Precedentemente il Franz [2], affermando che i vasi sanguiferi del nervo ottico si ramificano in tronchi sempre più sottili nel pettine, descriveva questi esili tronchi come capillari limitati da un comune endotelio ricoperto da una membrana sottilissima talvolta non riconoscibile, talvolta doppia, che sovente si presentava rivestita da una parete vasale anista e gelatinosa.

Per quanto il Franz, nelle sue indagini, sia giunto a vedere maggiori particolari, pure a un accurato esame dei miei preparati ho potuto mettere in rilievo alcune particolarità interessanti, sulle quali intendo soffermarmi.

Per procedere all'esame istologico dell'organo è necessario depigmentare, almeno parzialmente, chè altrimenti non si riesce a mettere in evidenza la sua fine struttura. Ho praticato perciò la depigmentazione con il metodo di Alfieri e con ottimi risultati.

*
* *

Dal vaso basale del pettine i tronchi vascolari normali alla sua base e quindi diretti nel senso longitudinale delle ondulazioni della lamina, la percorrono ramificandosi in vasi di calibro sempre più piccolo. Quelli più cospicui, che sono due per ciascuna delle pareti di ogni piega, sono delle vere arteriole precapillari con la parete costituita da un endotelio poco distinto, da una tunica esterna di fibrille elastiche compatte di forte rifrangenza. I vasi minori che occupano tutto lo spessore della lamina, e che in essa sono distribuiti in due piani fra loro adiacenti, hanno diametri che variano dai 12 ai 60-65 μ. Le cellule a contorno irregolare che ne formano l'endotelio, sporgono nel lume vasale con delle intumescenze del plasma in corrispondenza dei nuclei che sono elissoidi, in sezione, vescicolari, a cromatica raggruppata in granuli alla periferia e al centro dove è distinguibile, in alcuni, un netto nucleolo (fig. 1).

Oltre l'endotelio, questi vasellini, di cui quelli di minor calibro sono a definirsi come tipici capillari, posseggono all'esterno una spessa membrana connettivale e fra questa e l'endotelio, nei capillari che per il diametro del loro lume non potrebbero a rigore dirsi tali, sono distinguibili elementi cellulari a nuclei subuliformi disposti con il loro asse maggiore normale all'asse del vaso. Abbiamo a che fare con cellule costituenti una guaina in-

(1) « Quarter. Journ. of. Microscop. Science », vol. 68, part. III, 1924.

(2) « Biol. Zentrall. », Bd. 28, 1908; « Zool. Jahrb. », Bd. 28, 1909; « Arch. für Ophthal. », 3, 1910; SEHORGAN, in *Lehrb. d. vergl. Mikroskop. Anatomie* von Oppel, Jena 1913.

completa, l'*adventitia capillaris* (Eberth) che, cosa del resto ben nota, si annette sovente alla parete endoteliale dei capillari.

Per quel che riguarda i capillari del pettine il Denissenko [1] aveva già avanzato l'idea della loro dubbia natura e nello stesso modo Kajitawa ne aveva lontanamente cennato. Io insisto sul fatto, da me constatato, che cioè per la costituzione della loro parete, i capillari del pettine si allontanano dalla loro forma tipica, ciò sembrandomi di un certo interesse sia nei riguardi dell'attività funzionale del pettine, sia anche in rapporto alla rete vascolare che detti vasi formano, comportandosi molto diversamente che nelle comuni reti di capillari. Kajitawa [2] è d'avviso che debba trattarsi di una doppia rete

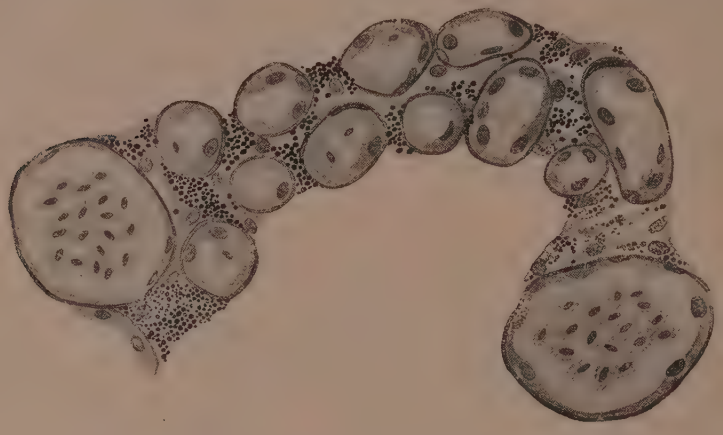

Fig. 1. — Porzione di una sezione trasv. della lamina che costituisce il pettine di un uccello (*Gallus*). (Obb. 6, Oc. 4 comp.),

mirabile, una arteriosa e una venosa, ma di ciò, pur avendo io stesso la medesima idea, aspetto a dare un asserto sicuro, allorquando avrò compiuto alcune iniezioni vascolari.

Il tessuto connettivo che sta come cemento fra vaso, e vaso è costituito da cellule pigmentifere a citoplasma granuloso e poco jalino completamente o quasi infarcito di pigmento, talchè il loro nucleo è totalmente nascosto riuscendo così poco visibile nei preparati. Le zolle di pigmento, che in sezioni trasverse del pettine appaiono circondare in particolar modo i vasi, sono risolvibili in sferucce di varie dimensioni che in gruppi compatti occupano l'interno degli elementi cellulari congiuntivali. I nuclei di queste cellule che si scoprono solo a una parziale depigmentazione, non hanno un nucleolo distinto e posseggono cromatina compatta e intensamente colorabile (fig. 1).

(1) « Arch. für Microskop. Anatomie », Bd. 19, 1881.
(2) « Arch. für Ophthal. », Bd. 112, 1923.

Si può dire che il pettine sia maggiormente pigmentato lungo il suo margine esterno e immediatamente al disotto; molto meno invece lungo la base delle pieghe, talchè, per quanto la pigmentazione sia diffusa a tutto l'organo, purtuttavia, anche a fresco, è evidente una maggiore trasparenza della lamina ondulata nella sua regione basilare.

In tutti i casi il decorso dei vasi segna la disposizione delle aree pigmentate che risultano formare un manicotto discontinuo intorno alla loro parete.

Il pigmento del pettine, certamente ben diverso nel suo significato da quello irideo e coroideo, e così tutto l'endotelio vasale, sono di natura mesodermica in quanto derivati dalle cellule mesodermiche che, nello sviluppo si sono interposte, ivi rimanendo, fra i labbri della fenditura della cupola ottica.

*
* *

Affatto ipotetica, e tutt'ora argomento vivo di discussione, è la funzione del pettine che, prescindendo da alcune attività funzionali secondarie cui sarebbe secondo alcuni deputato, si può ritenere quella di un organo di nutrizione della retina e del bulbo, o di un organo di senso. Di queste due opinioni la principale e la più espressa è la prima; la natura sensoriale del pettine ha pochi sostenitori e mi sembra la si possa abbandonare in quanto non si può confermare esaurientemente con fatti probativi.

Per convalidare questa ipotesi il Franz (loc. cit.) addusse il fatto di aver messo in evidenza, in preparati trattati con i metodi di Cajal e Bielschowsky, nella regione non ondulata del pettine, il margine esterno o ponte, alcune particolari strutture: si tratterebbe di formazioni simili a bastoncelli ingrossati a clava alla loro estremità, in cui terminerebbero, secondo detto A., delle minute vie nervose rappresentate da esili fibre. Le clave terminali delle fibre sarebbero all'esterno ravvolte come da piccoli cappucci. Sia le fibre nervose, che le terminazioni di senso descritte dal Franz nel pettine, e così pure da Abelsdorff e Wesseley [1] e da nessun altro A. riscontrate, sono da mettersi in dubbio e da ritenersi argomenti insufficienti per basare solo su di essi la verità della natura sensoria del pettine. Del resto, il Franz stesso, pone sotto una generale incertezza il valore dei suoi reperti e dubita della specificità dell'impregnazione, così che quegl'intrecci di fibrille da lui descritti, sono da interpretarsi con molta cautela.

D'altro canto, anch'io, per sincerarmi di ciò, ho agito sul pettine con i metodi di Cajal [2], e per non turbare l'andamento della reazione, non ho

(1) « Arch. für Augenheilk. », Bd. 64, 1909.

(2) Ho avuto ottimi risultati usando la formula 5ª del metodo di Cajal al nitrato di argento ridotto. La formula 3ª con la fissazione diretta in alcool e ammoniaca mi ha dato risultati negativi. Per le modalità di tecnica mi sono attenuto a quanto ha esposto recentemente il D'Ancona in: *I metodi istologici della scuola di Cajal*, (appunti di tecnica). Estratto da « Il cervello », anno IV, n. 4, 1925.

mai depigmentato i pezzi. Per mia esperienza ho constatato quanto nocivo sia il pigmento specialmente nella regione del margine esterno del pettine, per un chiaro esame dei preparati; purtuttavia non ho mai avuto impregnazione di fibre nella lamina, all'infuori che nella sua zona basilare di impianto.

In questa regione e particolarmente nello spazio di nevroglia che intercede fra le fibre del nervo ottico e la base propria del pettine, e che costituisce una vera lamina cribrosa gliosa, scorrono fibre nervose isolate o unite in fascetti che vanno a terminare sulla parete dei vasi. L'innervazione dei vasi sanguiferi del pettine, alla sua base, non è estesa a tutti i vasi più esili della lamina, poichè in essa nessuna fibra nervosa si è resa manifesta.

La constatata assenza di terminazioni nervose nel pettine, per quanto un reperto negativo ci convinca meno di quello positivo, e la presenza nella sola sua base di fibrille nervose, che si portano, come di regola, sulla parete dei vasi, così anche la fine struttura che sono venuto descrivendo ci inducono ad ammettere, condividendo il parere di Blochmann F. e Husen [1], il carattere essenzialmente vascolare del pettine e conseguentemente la sua natura puramente trofica.

Se d'altro canto, prendiamo in considerazione il modo, che brevemente ho riassunto, con cui il pettine si origina, i fatti che osserviamo sono a favore di detta ipotesi. Lo zaffo mesodermico primitivo che rappresenta l'abbozzo del pettine, è accompagnato da un'ansa vascolare che penetra tra i labbri della fenditura coroidea. L'ansa si definisce in un vaso, che nello sviluppo poi scompare, che è il vaso jaloideo e si può ricondurre difatti all'arteria jaloidea dei mammiferi, solchè mentre questa, a quanto espone Versari [2], traversando la cavità della cupola ottica raggiunge la superficie posteriore del cristallino, il vaso jaloideo degli uccelli invece, si porta adiacente alla parete della vescicola raggiungendone, man mano che la fenditura si chiude, l'apertura pupillare. In ambo i casi i due vasi scompaiono, il primo non lasciando più traccia di sè, il secondo costituendo, in parte e cioè con la sola sua base, *l'arteria centralis retinae*, che negli uccelli viene di conseguenza a mancare. La base dell'arteria jaloidea, nell'uomo, raccoglie intorno a sè del mesoderma migrato entro il calice come negli uccelli e che è perciò omologabile all'abbozzo del pettine [3].

Ciò premesso, possiamo renderci ormai esatto conto come in rapporto alla chiusura della fessura del calice ottico stiano sempre delle formazioni mesodermiche vascolarizzate transitorie o permanenti, che nei pesci, nei rettili, negli uccelli, si trovano all'inizio sotto forma di anse vascolari. Nei

(1) «Biol. Zentrall.», Bd. 31, 1911.

(2) *Morfologia dei vasi sanguigni dell'occhio dell'uomo e degli altri mammiferi.* Estratto dai «Lavori del Laborat. di Anat. norm. della R. Università di Roma», VII, 3-4, 1900.

(3) Si deve al Calderaro (citato da Ovio) la descrizione di un manicotto mesodermico circondante la base dell'arteria jaloidea in giovani embrioni umani.

rettili ha luogo la costituzione di un piccolo cono o pettine, perfettamente omologabile a quello degli uccelli ; se pure alla sua origine partecipa, secondo v. Szily [1], il solo mesoderma, siamo autorizzati ad ammettere che la secondaria cooperazione della parete retinica della cupola ottica, negli uccelli, sia in rapporto con la maggiore complessità morfologica e funzionale assunta dal pettine, in questi vertebrati.

Per concludere : pur essendo ben lontano dal volere ammettere che gli argomenti esposti siano sufficienti a rendere chiara la funzione del pettine, che solo sperimentalmente potrà essere messa in luce, io penso che i suoi caratteri strutturali esaminati, la assenza di elementi sensoriali, che l'applicazione dei metodi di impregnazione rende manifesta, la sua origine, riconducibile a quella di altre formazioni assili dei vertebrati, il nesso fisiologico fra retina e pettine stabilito dalla parte presa, nella sua formazione, dalla parete della cupola ottica, siano complessivamente tanti fatti che debbono essere presi in speciale considerazione ai fini dell'interpretazione futura della vera funzione del pettine.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio E. Marchiafava legge la seguente Commemorazione del Socio Nazionale Guido Banti:

Di un uomo, che fu medico e scienziato, che onorò con il suo lavoro la scienza italiana, il cui nome rimarrà nella storia dei progressi della Medicina, benefico alla umanità sofferente, mi fu dato dal nostro Presidente l'onore di fare la commemorazione. E l'uomo, che oggi commemoriamo, è il nostro socio Guido Banti. Egli nacque in terra Toscana, nel paese di Montebicchieri. Poco dopo conseguìta la laurea fu chiamato da Giorgio Pellizzari nell' Istituto di anatomia patologica di quella università; ivi percorse i gradi di assistente, di secondo dissettore, di primo dissettore. Nel 1887 fu incaricato dell'insegnamento della Patologia generale, che tenne fino al 1890, quando fu nominato straordinario di anatomia patologica, del quale insegnamento divenne ordinario nel 1895 e in tale carica rimase fino alla sua morte.

Con la carriera scientifica nell'Istituto di anatomia patologica egli congiunse la carriera ospedaliera ; di questa percorse i vari gradi fino a divenire primario dell'antico arcispedale di Santa Maria Nuova, ove praticarono tanti medici eminenti, ove insegnò quel precursore del rinnovamento moderno della Medicina, che fu Maurizio Bufalini e ove Leonardo dei Vinci ricorda

(1) « Archiv. für Ophthal. », Bd. 107, Bd. 109, 1922.

che, dopo aver veduto morire serenamente un centenario, volle farne l'autopsia *per conoscere la causa di così dolce morte.*

Così Guido Banti fu un assertore dell'alleanza fra la clinica e l'anatomia patologica, proclamata già da G. B. Morgagni, il nostro grande riformatore della Medicina, alleanza che gli consentì la individuazione di sconosciute forme morbose sotto gli aspetti nosologico, anatomo patologico, patogenetico, terapeutico.

Dopo 42 anni di primariato, G. Banti dovè dare le sue dimissioni per obbedire alla legge dei così detti *cumuli d'impiego*, che vieta quindi anche ad un professore delle Facoltà Mediche di essere professore universitario e insieme primario in un ospedale. Io mi permetto, e non sono il solo, di esprimere un parere sfavorevole a questa legge nella parte che concerne la incompatibilità fra le cariche di direttore ed assistente di un Istituto di patologia e quelle di medico ospedaliero, perchè con quest'applicazione si ferisce quell'alleanza benefica, ora ricordata, fra la clinica, l'anatomia, patologica e la patologia sperimentale. E così si ostacola il libero svolgimento delle iniziative e si sottraggono all'insegnante di Patologia quei mezzi di studio, che, non dati dallo Stato, sono da lui, per i suoi meriti, conseguiti negli ospedali. Si obbietta che il connubio dell'insegnamento della patologia e della pratica ospedaliera possa essere nocivo al progresso della scienza e alla scuola. È questo un grave errore da perdonarsi agli incompetenti. Rodolfo Virchow, il grande patologo tedesco, fondatore della patologia cellulare, non era primario nell'ospedale della *Charité* a Berlino? E il nostro amato e venerato socio Camillo Golgi, cui si devono decisive scoperte sulla fine struttura del sistema nervoso e sulla vita dei parassiti malarici, non era primario nell'ospedale maggiore di Pavia? Se Guido Banti non avesse avuto a sua disposizione un reparto ospedaliero, nel quale osservare, studiare e seguire il decorso delle malattie, la sua attività scientifica non sarebbe stata nè così completa, nè così benefica. Egli aveva quindi ben ragione di ripetere che la patologia è una e che la malattia dev'essere studiata in tutti gli aspetti dinamici e materiali. Pertecipo quindi al giudizio severo, che di tali restrizioni regolamentari ha dato il socio Lustig nella commemorazione di Banti, da lui fatta con mente di scienziato e con cuore di amico.

Il riconoscimento della sua perizia come clinico gli fu dato unanime dalla Facoltà medico-chirurgica di Firenze quando lo designò come successore a Pietro Grocco nella cattedra di clinica-medica. Se non che il Consiglio superiore della Pubblica Istruzione non approvò il voto della Facoltà.

Ben lunga dovrebbe essere la mia commemorazione se io volessi fare un esame di tutti i lavori prodotti dall'attività scientifica di G. Banti. Mi limiterò quindi a ricordare alcuni dei più notabili. Di questi ve ne sono d'indole prevalentemente clínica, e anatomo-patologica, o batteriologica o sperimentale; ma i più numerosi e nello stesso tempo i migliori, sono clinici e anatomo patologici e sperimentali, alcuni con riguardo anche alla cura.

Fra i suoi lavori clinici sono assai pregevoli gli studi intorno la percussione del cuore; sulle forme atipiche della infezione tifosa; sulla piloro–stenosi e l'intervento chirurgico nella malattia di Reichmann; il siero antipneumonico nella cura della polmonite.

La sua perizia anatomo–patologica è resa manifesta da parecchie sue pubblicazioni, delle quali ricordiamo, come veramente importanti, le alterazioni del simpatico nella nefrite–parenchimatosa, la ipertrofia generale delle mammelle, il carcinoma primitivo della tiroide, il sarcoma infiltrato bilaterale dei reni, l'occlusione della vena cava–superiore da endoflebite tubercolare, le cause anatomiche del disturbo di compenso dei vizi valvolari. Il penultimo lavoro contiene la descrizione d'importanti fatti istologici di una localizzazione, non prima veduta, del processo tubercolare in una delle grandi vene di sbocco nel cuore. Nell'ultimo si espone lo studio istologico del miocardio nei vizi valvolari scompensati, onde risulta una cirrosi venosa dalla stasi nelle vene coronarie e ne deriva la spiegazione della insufficienza cronica progressiva del cuore. E questa è una sua veduta originale.

Quando il Banti cominciò nel 1879 a svolgere la sua attività scientifica, si era nel fervore delle ricerche sulla etiologia parassitaria delle malattie infettive degli animali e dell'uomo e già vere conquiste si erano conseguite. Banti ne comprese l'alto valore per la medicina preventiva e curativa e ne fu stimolato, come altri suoi colleghi, a contribuirvi colle sue ricerche, dopo essersi reso padrone della tecnica batteriologica, come dimostrò con il suo manuale intorno a questo argomento pubblicato nel 1885.

Come il socio Pio Foà, che ebbi l'onore di commemorare in quest'Accademia or sono due anni, egli volse le sue prime indagini al germe patogeno della polmonite, allora da non molto tempo scoperto e ne studiò le localizzazioni extrapolmonari secondarie alla polmonite e primitive come nella meningite e con ricerche sperimentali, confermò la esistenza delle due varietà di diplococco descritte da Foà, la *fibirinogena* dall'essudato della meningite diplococcica e la *edematogena* dall'essudato pneumonico e aggiunse altre tre varietà, che si distinguono dalle prime per una speciale azione dissolvente sui globuli rossi e per un'azione eminentemente tossica sugli animali. Le proprietà patogene insolite, secondo le ricerche di Banti, si attenuano e prontamente scompaiono nelle culture e anche nelle infezioni in serie negli animali, onde Banti fu indotto a considerare tali varietà labili ed effimere. Ad ogni modo egli ritenne che le varietà dei ricordati germi patogeni rappresentassero un fattore importante in patologia e potessero contribuire alla spiegazione della mutabilità clinica della polmonite, quando non dipenda da condizioni individuali, e del così detto genio epidemico degli antichi medici. Così in una circoscritta epidemia di polmoniti, accompagnata da itterizia, Banti nel 1896, riuscì a coltivare un diplococco dotato d'intenso potere emolitico nei conigli e nei cani; nei primi con emoglobinuria; nei secondi con emoglobinuria, urobilinuria e bilirubinuria. Poco dopo a queste varietà Tizzoni

e Panichi aggiunsero un'altra, che, per la sua azione patogena, designarono con il nome di nevrotossica.

Lo studio dei patologi italiani sulle varietà del diplococco della polmonite precedettero di molti anni le ricerche sullo stesso argomento dei patologi americani, i quali distinsero varie specie di diplococchi rivelate dai caratteri biologici, sebbene abbiano gli stessi caratteri morfologici e culturali, e ciò fecero distinguendone quattro tipi con l'aiuto dei sieri prodotti iniettando diplococchi viventi di diverse provenienze in grossi animali ed esperimentandone l'azione protettiva per i vari tipi.

Quanto alle vie d'invasione del pneumococco per giungere al polmone e provocarvi la polmonite, Banti alla teoria aerogena preferisce la teoria ematogena: cioè, che il germe vi arrivi per le vie sanguigne e proprio per il sangue dell'arteria polmonare e lo sostiene con prove cliniche ed anatomo-patologiche.

All'azione patogena del pneumococco si connette il lavoro del 1891 sulla endocardite diplococcica secondaria e primitiva. È questo un lavoro clinico ed anatomo-patologico e batteriologico di molto interesse pratico e che è stato largamente confermato.

Sulle infezioni da bacilli capsulati, a quelli già noti aggiunse il *bacillus capsulatus septicus* provocatore di setticemia e il *bacillus icterogenes capsulatus*, che egli coltivò dalla milza in un caso d'ittero infettivo.

Nella infezione tifosa Banti fu uno dei primi, nel 1887, a dimostrare la esistenza di una setticemia tifica senza le consuete lesioni dell'intestino. Ora la setticemia tifica è riconosciuta come un fatto costante e primitivo, cui seguono le localizzazioni dell'apparecchio digerente. Ma, in quella epoca, ciò non si conosceva e Banti parlava di casi d'infezione generale del sangue da bacilli tifici senza localizzazioni; cioè, del *typhus sine typho*.

In un lavoro di patologia generale, scritto nel 1898, sulla distribuzione dei batteri nell'organismo, dopo aver discusso sulla base di osservazioni e di esperienze personali la questione se le cellule introducono nel loro protoplasma i batteri vivi e li uccidono, oppure quando sono già morti, Banti si dimostra proclive a confermare la dottrina di Metchnikoff delle cellule fagocitarie, tanto leucocitarie quanto endoteliali, per la distruzione dei batteri, onde il fatto fondamentale delle reazioni protettrici cellulari.

Banti si occupò due volte della etiologia della pericardite. La prima volta nel 1880, quando descrisse casi di pericardite nella uremia e la ritenne come flogosi provocata dalla irritazione di prodotti tossici endogeni trattenuti nel sangue e nei tessuti per la insufficienza della funzione depuratrice dei reni. Aggiunse alle osservazioni cliniche ed anatomo-patologiche, ricerche sperimentali sulla pericardite diplococcica iniettando entro le vene culture di diplococchi, dopo la irritazione della sierosa pericardica con sostanze chimiche. La seconda volta, nel 1894, con due nuovi casi di pericardite siero-fibrinosa sviluppatasi nel corso della uremia da nefrite cronica

e nei quali, avendo le ricerche microscopiche e culturali esclusa la presenza di batteri, egli ne conclude che la pericardite non è di origine infettiva ma di origine tossica e da chiamarsi veramente *pericardite uremica*. Alle osservazioni cliniche ed anatomo-patologiche anche in questo secondo lavoro aggiunge ricerche sperimentali per confermare la interpretazione data.

Fra i suoi lavori clinici ed anatomo-patologici meritano di essere ricordati due intorno ad uno dei più difficili e dei più discussi argomenti di neuro-patologia; cioè, sull'afasia: uno pubblicato nel 1886 e l'altro nel 1907. Nel primo lavoro, che si può chiamare una monografia sull'afasia e le sue varie forme, illustra casi da lui studiati con l'osservazione clinica ed anatomo-patologica, onde gli risultarono fatti nuovi; fra i quali che il lobulo parietale inferiore fa parte, con le due prime circonvoluzioni temporali, del territorio uditivo corticale, centro dei simboli verbali e che lesioni di questo centro, circoscritte alla porzione parietale, in vece della sordità verbale possono provocare la perdita della facoltà di rievocare la memoria delle parole adatte a designare gli oggetti; cioè l'*amnesia verbale*. Nel secondo lavoro, dopo avere riassunto ciò che aveva scritto nel precedente, confermato da ulteriori osservazioni, fa la critica della dottrina dell'afasia, allora nuova, pubblicata nel 1906 dall'eminente neuro-patologo francese Marie, che mutava radicalmente l'antica dottrina universalmente accettata, perchè non ammetteva la esistenza dei centri corticali sensoriali; negava che il centro motorio del linguaggio fosse nella 3ª circonvoluzione frontale sinistra, il così detto centro di Broca, ritenendo che l'afasia motrice pura dovesse considerarsi non come un'afasia ma come un'anartria provocata da una lesione del territorio insulo-lenticolare e che l'afasia in genere dipendesse da un *deficit* della intelligenza, effetto di una lesione della regione di Wernicke, cui appartiene una parte del lobo parietale, costituente un centro intellettuale non sensoriale. Banti in vece affermava che la nuova dottrina generale del linguaggio di Marie non sembrava corrispondere ai fatti clinici ed anatomici osservati da eminenti neuropatologi e da lui. La sua critica è convincente quando discute la proposizione di Marie che l'afasia propriamente detta sia la conseguenza di un disturbo della intelligenza, perchè questa può conservarsi, come egli aveva veduto in alcuni infermi, che avevano perduto la facoltà di parlare e di comprendere i discorsi degli altri. Nel giudizio non favorevole alla dottrina di Marie sull'afasia non fu solo. La espressero altri neuropatologi italiani e stranieri; fra questi Oppenheim, che la giudicò errata.

Mentre scriveva questa commemorazione mi capitò nelle mani il libro di Neurologia di Pitres e Testut uscito in questi giorni. Gli autori francesi sono rimasti fedeli alla esistenza dei quattro centri del linguaggio, due sensoriali e due motorî anatomicamente distinti. La critica alla dottrina di Marie, nella parte che riguarda l'affermazione che le perturbazioni del linguaggio nelle sindromi afasiche, così sensoriali come motrici, siano prodotte da un

deficit della intelligenza, è fatta quasi con le stesse parole di quella scritta da Banti ventotto anni prima. Anche Pitres e Testut sostengono che, se è vero che tutti gli afasici presentano un certo grado di debolezza psichica, questa non è proporzionale ai disturbi della parola: molti afasici, cui manca la possibilità di parlare e di scrivere, sono capaci di riflessione, di giudizio, di volontà; giuocano alle carte, agli scacchi e dimostrano d'interessarsi dei loro affari. Proprio come sosteneva Banti sulla guida delle sue personali osservazioni. Aggiungo ancora che la classificazione delle forme di afasia di questi due autori - sensoriali, motrici, amnesiche - è nella sostanza identica a quella di Banti esposta quarant'anni or sono.

E ora ricorderemo brevemente l'opera di Guido Banti, nella quale rifulsero maggiormente la sua lucida e chiara intelligenza, il suo spirito penetrante di osservazione, onde potè individuare tipi morbosi traendoli fuori da complessi nosologici, nei quali sarebbero rimasti confusi, chi sa per quanto tempo, senza la sua indagine. Egli fu come un sapiente archeologo, che dalle rovine di una città antica, sa ricomporre tempî e monumenti e dettarne la storia.

Il campo nel quale egli compì questa opera indagatrice fu quello della malattia del sangue e degli organi emopoietici.

E dapprima alla leucemia, nelle sue varie forme, dedicò studi clinici ed istopatologici, onde egli potè nel 1903 comporre un lavoro sintetico, nel quale espose le sue idee intorno a questa malattia, le cui alterazioni sono precipuamente negli organi emopoietici: midollo delle ossa, milza, glandole linfatiche e nel sangue. Nelle leucemie, affermò Banti, si ravvisano fatti anatomici ed istologici, specialmente la invasione del tessuto leucemico oltre la barriera degli organi emopoietici; il carattere, cioè, infiltrante, invadente, aggressivo; le localizzazioni leucemiche in altri organi, che rivelano la parentela fra la leucemia e la sarcomatosi. E, posteriormente, in seguito a nuovi studi istologici accuratissimi, fu indotto ad escludere la natura iperplastica della leucemia universalmente ammessa e a riconoscere, nelle sue varie forme, malattie sistemiche degli organi emopoietici da distinguersi in sarcomatosi sistemica linfo-adenoide e in sarcomatosi sistemica mieloide. Non accettò quindi la distinzione di alcuni autori stranieri delle leucemie in iperplastiche e sarcomatose: tutte le leucemie appartengono alle sarcomatosi sistematiche, non nel senso, com'egli disse in comunicazioni posteriori, di veri blastomi, come i sarcomi comuni, ma di un gruppo neoformativo fra i granulomi e i sarcomi: una vegetazione atipica di tessuto linfoide o mieloide di origine infettiva, sistemica negli organi emopoietici, la quale è leucemica quando la neoformazione ha invaso, fino a distruggere gli endoteli, le pareti dei vasi sanguigni, onde il versamento nel circolo degli elementi cellulari neoformati; è, invece, pseudo-leucemica; cioè, senza alterazione notabile del sangue riguardo ai globuli bianchi, quando non avvenga quella completa infiltrazione delle pareti vasali. A proposito della leucemia, Banti die' prova di facoltà

autocritica quando modificò alcuni concetti troppo assoluti sulla qualità delle cellule bianche circolanti nelle leucemie e sulla genesi delle localizzazioni leucemiche fuori degli organi emopoietici, espressi nei lavori anteriori.

È mio dovere aggiungere che il concetto della natura neoplastica del tessuto leucemico era già stato espresso dal socio Bignami nel 1898 in due lavori, uno sopra le neoformazioni sistematiche midollari e l'altro sulla linfemia. Egli inoltre, dissenziente dal Banti, considera la leucemia e la pseudoleucemia come due gruppi di stati morbosi nettamente distinti e non come una sola malattia, come viene sostenuto da quegli autori, per i quali le alterazioni leucemiche del sangue rappresentano un fatto contingente.

Se non che più originali, più importanti, più benefici per la terapia sono gli studi del Banti intorno a due altre malattie del sistema emopoietico: cioè, la splenomegalia emolitica e la splenomegalia con cirrosi del fegato.

Della complessa famiglia degli itteri emolitici individualizzò la splenomegalia emolitica per caratteri semiologici, patogenetici, terapeutici; dei quali i fondamentali sono: la splenomegalia considerevole; l'anemia a decorso cronico e progressivo da esagerata emolisi, direttamente verificata con ricerche istologiche nella milza, nel fegato, nel midollo delle ossa, nelle glandole linfatiche (eritrofagia, presenza di pigmento ematico in grande copia); l'ittero a carattere emolitico; la dipendenza della emolisi da un'alterazione della funzione della milza, come viene dimostrato dalla guarigione per la estirpazione di quest'organo.

Rileggendo nei lavori di Banti, intorno la splenomegalia emolitica, le osservazioni cliniche ed anatomo-patologiche e le ricerche sperimentali, che le seguirono, vien fatto di ricordare il monito del grande fisiologo Claude Bernard ai suoi allievi del Collegio di Francia. « Se io vi parlo della sperimentazione io non ammetto che tutta la medicina in quella consista: il nostro scopo è di spiegare i fenomeni che la clinica ci fa conoscere. E aggiungerò che, seguendo la via sperimentale, è sempre alla osservazione clinica che bisogna andare a ritemprarsi se non si vuole travіare e seguire una falsa strada ».

Ora Guido Banti dalle osservazioni cliniche ed anatomo-patologiche fu stimolato alla sperimentazione per ispiegare i fenomeni, che quella gli aveva fatto conoscere, in modo particolare, per verificare se i fatti clinici ed anatomo-patalogici, che conducevano ad ammettere la considerevole azione emolitica della milza, trovassero la loro conferma nei dati forniti dalla fisiologia e dalla patologia sperimentale e comprendere così la patogenesi della splenomegalia emolitica e degli itteri emolitici ed interpretare con criteri scientifici, e non empiricamente soltanto, il risultato benefico della splenectomia.

Dalle sue esperienze, esposte nel lavoro *Ufficio della milza nella emolisi* con vari veleni emolitici, compresi i sieri specifici, egli ebbe la conferma

che la milza è l'organo più attivo della emolisi fisiologica e patologica (per fagocitosi delle emazie dei macrofogi della polpa splenica e per l'azione sui globuli rossi di citoemolisine liberate dalle cellule soccombenti per necrosi); mentre il fegato, le glandole linfatiche, il midollo delle ossa si dimostrano agenti secondari, quando le cause emolitiche sono molto attive per quantità e per qualità. Gli animali, cui viene tolta la milza, sopportano senza grave danno dosi di veleni emolitici, che sono letali negli animali con la milza; nei primi occorrono dosi triple perchè si abbiano l'emolisi e la itterizia; onde la dimostrazione che la emolisi è funzione precipua della milza, il cui ingrandimento negli itteri emolitici nell'uomo e negli animali, non è spodogeno, cioè conseguenza della emolisi, ma è la manifestazione anatomica della malattia splenica provocatrice della emolisi. Per la iniezione endovenosa negli animali di sieri emolitici specifici, che hanno azione emolitica lenta e tardiva, risulta la maggiore rassomiglianza fra i fenomeni che si osservano nella sperimentazione e quelli che sono propri degli itteri emolitici.

Dalla patologia sperimentale ritornando alla clinica, Banti riteneva che la estirpazione della milza nell'anemia emolitica splenomegalica non sopprime probabilmente la causa emolizzante, ma elimina l'organo, che è lo strumento principale, per il quale la emolisi si compie, onde la innocuità della permanenza di quella causa, anche perchè, per la mancanza della milza, aumenta la resistenza dei globuli rossi di fronte agli agenti emocateretici. Tale aumento della resistenza globulare dopo la splenectomia diventa maggiore con il tempo dopo l'operazione, come ha dimostrato Banti in due casi: in uno, nel quale, otto anni dopo la splenectomia, la emolisi totale nelle soluzioni di cloruro di sodio avveniva soltanto a 0.16 per cento e nell'altro non avveniva neppure nell'acqua distillata. Dall'aumento di resistenza dei globuli rossi, dopo la splenectomia, si deve supporre, come rifletteva Banti, che questa operazione possa riuscire utile anche in certe anemie ad etiologica e patogenesi ancora ignote.

Se il tipo morboso, ora ricordato, messo in luce da Banti, non porta il suo nome, questo viene dato giustamente ad un'altra malattia da lui egualmente individuata. E malattia di Banti viene denominata in tutti i trattati di patologia medica italiani e stranieri. Voglio subito ricordare le parole, con le quali uno dei più eminenti emopatologi stranieri, il Naegeli, comincia il capitolo di questa malattia: « un grande numero di splenomegalie a decorso cronico, di etiologia ignota, ha molti caratteri comuni; è merito del patologo italiano Banti di avere individuato un complesso sintomatico con la maggiore possibile precisione (*mit möglichster Schärfe herausgehoben hat*) ».

Fu nel 1894 che Banti pubblicò il primo lavoro sopra un complesso sintomatico ed anatomo-patologico tutto speciale che, secondo l'autore, poteva costituire una nuova specie morbosa, cui si doveva dare la designazione di *splenomegalia con cirrosi del fegato*, da distinguersi dalla cirrosi volgare. La descrizione netta, chiara, precisa di quel tipo morboso rimane nelle

sue linee essenziali, quale egli, fissando l'attenzione ai primi casi, l'aveva fatta, trent'anni or sono, sempre confermata da nuove osservazioni, con l'aggiunta di particolarità, che non mutano la fisonomia primamente da lui scolpita dello stato morboso.

Già in quel primo lavoro egli distingueva tre stadii della malattia eminentemente cronica: il primo stadio di anemia con splenomegalia di lunga durata; segue un secondo stadio di breve durata con prevalenti perturbazioni gastro-intestinali e, da ultimo, si ha uno stadio ascitico, che termina con l'esito letale. L'anatomia patologica dimostra, come lesioni caratteristiche di questa malattia, la fibro adenia della milza; cioè, la sclerosi dei corpuscoli di Malpighi con inizio dalle arteriole centrali e della polpa senza segni di emolisi; alterazioni ben diverse da quelle, che sogliono trovarsi nel tumore splenico della cirrosi epatica volgare e in altre splenomegalie. Si ritrova inoltre una sclerosi della vena splenica, dalla quale il processo endoflebitico sclerotico si diffonde alla vena porta e alle diramazioni intraepatiche e, nell'ultimo stadio, una cirrosi epatica senza siderosi.

Fin dalle prime osservazioni Banti ritenne che la milza fosse l'organo che primamente ammala, l'organo, onde abbiano origine le alterazioni del sangue, e, in seguito, del fegato per un agente causale, non ancora conosciuto, che fa ammalare la milza e provoca in quest'organo la formazione di prodotti tossici prima anemiogeni e poi cirrogeni. La dimostrazione che nella malattia di Banti, la milza sia la sorgente della intossicazione, onde l'anemia, la cirrosi del fegato e tutti gli altri sintomi è data dalla guarigione rapida e permanente, che si ottiene per la splenectomia, come nella splenomegalia emolitica. E mentre in questa malattia la splenectomia elimina l'organo provocatore della distruzione esagerata dei globuli rossi; nella splenomegalia con cirrosi epatica elimina l'organo onde originano i veleni dell'anemia, della cirrosi, della morte.

Le comunicazioni di Banti sopra questo nuovo stato morboso suscitarono l'interessamento dei medici e dei patologi e non mancarono di sollevare critiche, obbiezioni e discussioni. Alle prime egli rispose non tanto con argomentazioni quanto con fatti, con nuovi casi, che confermavano e rendevano più completa la descrizione del morbo, cui aveva dato il suo nome.

Le discussioni sulla malattia di Banti continuano ancora; forse si renderanno palesi nuovi fatti, onde ne verranno modificazioni al concetto di Banti o anche scissioni della sua malattia in più forme; ma, non per questo, verrà scemato il merito di lui di aver dimostrato con le sue osservazioni la esistenza di uno stato morboso primitivo della milza, provocatore di anemia e di alterazione del fegato e che ha esito letale se non si esegue a tempo la estirpazione della milza.

Tutti i lavori del Banti sulla patologia degli organi emopoietici sono lucidamente riassunti nel suo *Trattato di anatomia patologica*, che la morte lasciò sventuratamente incompleto.

Agli originali contributi dati alla clinica, all'anatomia patologica, alla patologia sperimentale Banti aggiunse pubblicazioni d' Igiene pubblica specialmente per la difesa e la lotta contro le malattie infettive, delle quali fu operoso assertore quando per due anni tenne il posto di assessore dell' ufficio d' Igiene nel Municipio di Firenze. Dimostrò inoltre il suo interessamento per la salute pubblica quando fu relatore della commissione, della quale fece parte anche il socio Fano, che riferiva all'accademia medica fiorentina « sulla questione del controllo obbligatorio dei sieri e prodotti affini ». Questa relazione, della quale poi il Governo ha tenuto il meritato conto, gli valse critiche acerbe, alle quali egli rispose vittoriosamente.

G. Banti fu un abile ed accorto direttore di laboratorio, come dimostrano le pubblicazioni pregevoli dei suoi allievi, e un insegnante preclaro. Nelle sue lezioni, nelle quali rifulgevano l'ordine e la chiarezza della sua mente eletta, egli fu fedele agli insegnamenti del nostro grande Maestro G. B. Morgagni, il quale, nella prefazione alla sua opera immortale *De sedibus et causis morborum per anatomen indagatis* esalta la utilità, che apportano ai medici e, per essi, a tutto il genere umano *morborum historiis adiectae illorum, qui inde perierint, dissectiones*. E però Guido Banti dalla storia della malattia, spesso da lui stesso osservata, passava alla indagine sul cadavere e da questo, nelle lucide epicrisi, ritornava all' infermo; insegnando in tal guisa un'anatomia patologica vivificata dalla clinica, quell'anatomia patologica, che deve insegnarsi agli studenti, che si avviano alla carriera ospedaliera e all'esercizio della medicina. Ed è così che numerose generazioni di medici nelle difficoltà della diagnosi, nelle incertezze delle interpretazioni, onde l'animo del pratico spesso si tormenta, volgono il pensiero riconoscente agli insegnamenti ricevuti da Guido Banti e ricordano con il maestro e lo scienziato, il carattere di lui nobile, profondamente buono, equanime, sereno, giusto.

Al rimpianto per la sua perdita della Università fiorentina, la sua vera *Alma Mater*, cui fu figlio devoto per più di mezzo secolo, partecipa la nostra Accademia, che serberà fedele il ricordo del socio Guido Banti, benemerito della scienza e della umanità.

G. C.

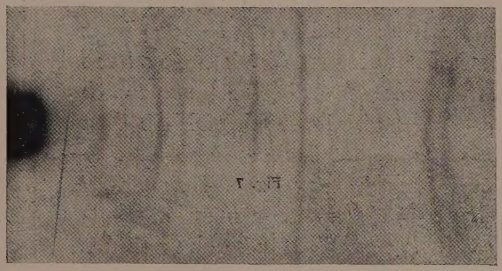

Fig. 1

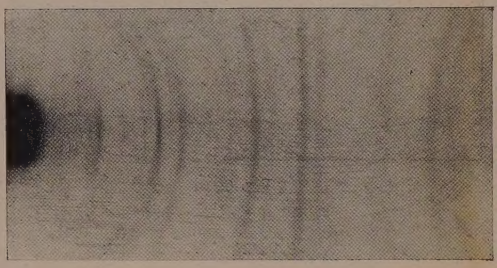

Fig. 2

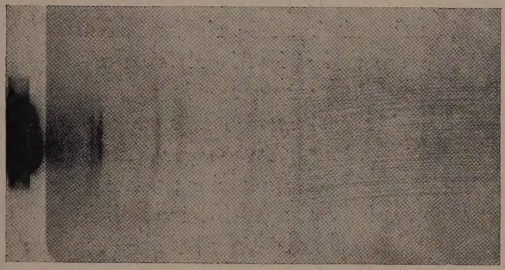

Fig. 3

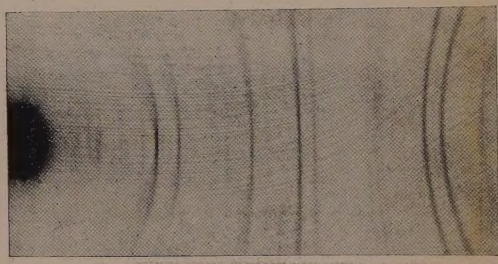

Fig. 4

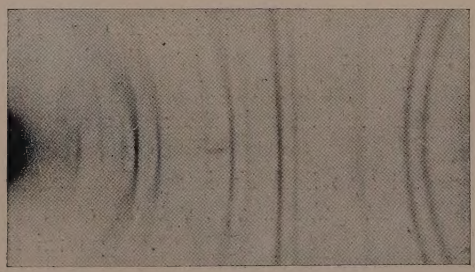

Fig. 5

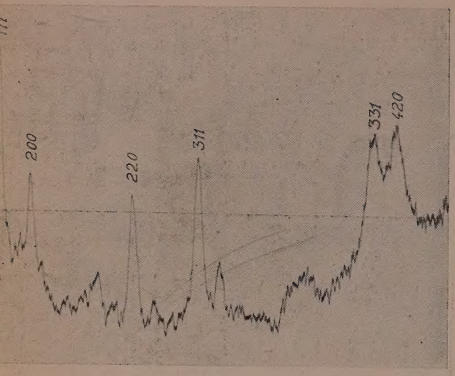

Fig. 6

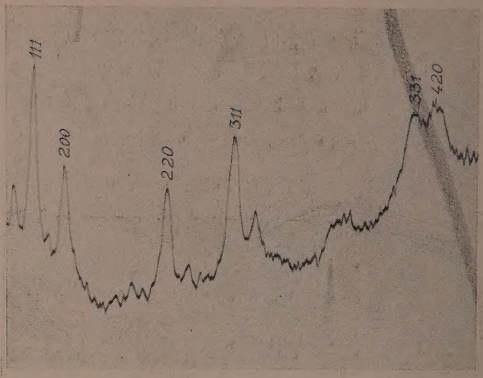

Fig. 7

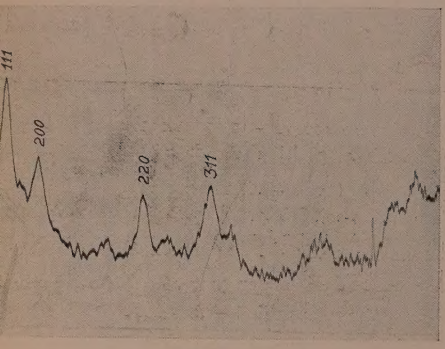

Fig. 8

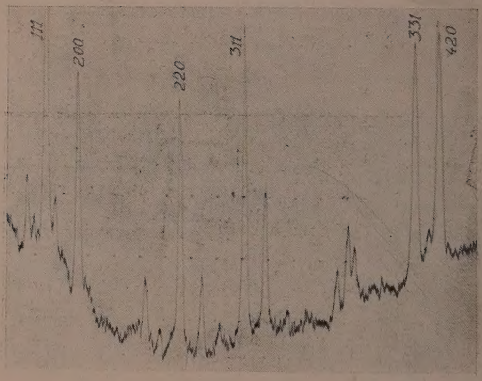

Fig 9

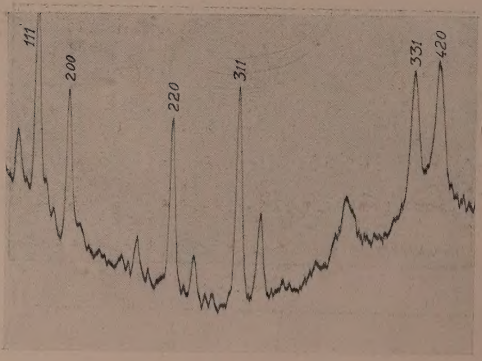

Fig. 10